Wolfgang Renner
Gimbacher Weg 34
D-65779 Kelkheim
www.institut-wolfgang-renner.de
institut-wolfgang-renner@t-online.de
Telefon: 06195 4161

Kelkheim den 16. März 2015

Der Binomialkoeffizient

© Wolfgang Renner Nov. 1995

Die Summe zweier Variablen wird in die n-te Potenz erhoben $(x+y)^n$. Wenn man diese Potenz ausmultipliziert, ergeben sich Klassen aus gleichwertigen Monomen (Kommutativgesetz), welche sich zusammenfassen lassen. Die Anzahl der Monome pro Klasse wird mit dem Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ beschrieben. n ist dabei die Potenz und k die Klasse der Monome, in welcher gerade eine Variable zur k-ten Potenz steht. Beispiel:

$$(x+y)^2 = (x+y)\cdot(x+y) = x^2 + xy + yx + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$= \binom{2}{0} x^2 \cdot y^0 + \binom{2}{1} \cdot x^1 y^1 + \binom{2}{2} x^0 y^2 \quad \text{mit } \binom{2}{0} = \binom{2}{2} = 1 \text{ und } \binom{2}{1} = 2$$

Für beliebige Potenzen n ergibt sich folgendes Schema:

Potenz	Resultat vom Ausmultiplizieren		Pascalsches Dreieck
$(x+y)^0 =$	1	$\binom{0}{0}\cdot x^0 y^0$	1
$(x+y)^1 =$	$x + y$	$\binom{1}{0}\cdot x^1 y^0 + \binom{1}{1} x^0 y^1$	1 1 k=2
$(x+y)^2 =$	$x^2 + 2xy + y^2$	$\binom{2}{0} x^2 y^0 + \binom{2}{1} x^1 y^1 + \binom{2}{2} x^0 y^2$	1 2 1
$(x+y)^3 =$	$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$		1 3 3 1
$(x+y)^4 =$	$x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$		n=4 – 1 – 4 – 6 – 4 – 1
$(x+y)^5 =$	$x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$		1 5 10 10 5 1
$(x+y)^6 =$	$x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$		1 6 15 20 15 6 1

Allgemein bezeichnet man die Beziehung zwischen binomischer Potenz und ausmultiplizierter Form als Binomischen Satz:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k} \qquad \text{Wegen } \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

$$(x-y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot (-y)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k$$

Beim Übergang auf die zweite Zeile wurde der Symmetriesatz benutzt, welcher aus der Symmetrie der Potenz und ihrer ausmultiplizierten Form folgt:

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \qquad \text{für } n,k \in \mathbb{N} \text{ und } k = 0,1,2,\dots,n$$

Im Pascal'schen Dreieck wurden die durch ausmultiplizieren ermittelten Binomialkoeffizienten in Dreiecksform angeordnet. Man erkennt, daß sich alle Binomialkoeffizienten als Summe der beiden darüberliegenden Binomialkoeffizienten ergeben. Die Randglieder sind dabei immer gleich eins. Wir vermuten daher folgenden allgemeinen Additionssatz der Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \qquad \text{bzw.} \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Dieser Additionssatz läßt sich mit einem Induktionsschritt von n nach $n+1$ beweisen:

$$(x+y)^{n+1} = \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} y^k\right] \cdot (x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{(n+1)-k} \cdot y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^{k+1}$$

$$= \binom{n}{0} \cdot x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{(n+1)-k} \cdot y^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} \cdot x^{n-(k-1)} \cdot y^k + \binom{n}{n} \cdot y^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{0} \cdot x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] \cdot x^{(n+1)-k} \cdot y^k + \binom{n+1}{n+1} \cdot y^{n+1}$$

$$\stackrel{!}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot x^{(n+1)-k} \cdot y^k \qquad \Rightarrow \quad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Um den Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ als explizite Funktion von n und k darzustellen, kann man verschiedene Wege gehen. Später beim Polynomialkoeffizient werden wir kombinatorisch vorgehen. Für den Binomialkoeffizienten benutzen wir nun einen Koeffizientenvergleich mit der entsprechenden Taylorentwicklung.

– 2 –

Dabei können wir die binomische Entwicklung zwanglos auf reelle Potenzen $n = a \in \mathbb{R}$ erweitern.
Für den Vergleich mit der Taylorreihe klammern wir eine der beiden Variablen x, y aus und entwickeln nach dem verbleibenden Quotienten $\frac{y}{x}$. Für reelle Potenzen setzen wir die Binomialentwicklung als unendliche Reihe an:

$$(x+y)^n = x^n \cdot \left(1+\frac{y}{x}\right)^n = x^n \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot z^k \qquad \text{mit } z = \frac{y}{x}$$

$$(x+y)^a = x^a \cdot (1+z)^a = x^a \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} \cdot z^k \qquad \text{für } y < x$$

Wir betrachten nun die als bekannt vorausgesetzte Taylorentwicklung:

$$f(z) = f(0) + f'(0) \cdot z + \frac{f''(0)}{2} \cdot z^2 + \frac{f'''(0)}{6} \cdot z^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot z^k$$

Die verschiedenen Ableitungen von $f(z) = (1+z)^a$ ergeben sich einfach aus der Potenzregel der Differentialrechnung:

$$\begin{aligned}
f(z) &= (1+z)^a & f(0) &= 1 \\
f'(z) &= a \cdot (1+z)^{a-1} & f'(0) &= a \\
f''(z) &= a \cdot (a-1) \cdot (1+z)^{a-2} & f''(0) &= a \cdot (a-1) \\
f'''(z) &= a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot (1+z)^{a-3} & f'''(0) &= a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \\
&\vdots \\
f^{(k)}(z) &= a \cdot (a-1) \cdots (a-k+1) \cdot (1+z)^{a-k} & f^{(k)}(0) &= a \cdot (a-1) \cdots (a-k+1) = (a)_k
\end{aligned}$$

Der Ausdruck $(a)_k$ ist eine Kurzform für das gegebene Produkt. Weil solche Produkte häufig vorkommen, sei bemerkt, daß man folgende Namenskonvention festgelegt hat:

Untere Faktorielle: $(a)_k = a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdots (a-k+1)$

Obere Faktorielle: $(a)^k = a \cdot (a+1) \cdot (a+2) \cdots (a+k-1)$

Für $k = 0, 1$ gilt: $(a)_0 = (a)^0 = 1$ und $(a)_1 = (a)^1 = a$

Fakultät: $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-1) \cdot k = (1)^k = (k)_k$

Nun setzen wir die Binomische Reihe und die Taylorreihe gleich:

$$(1+z)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} \cdot z^k \overset{!}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k!} \cdot z^k$$

Koeffizientenvergleich liefert nun den Binomialkoeffizienten für beliebige $a \in \mathbb{R}$ zu:

$$\binom{a}{k} = \frac{(a)_k}{k!} = \frac{a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdots (a-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}$$

Für natürliche Potenzen $a = n \in \mathbb{N}$ erhalten wir:

$$\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!} = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!} & \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots, n \\ 0 & \text{für } k > n \end{cases}$$

Für natürliche Binomialkoeffizienten $n \in \mathbb{N}$ wurde der Symmetriesatz $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ gefordert:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-(n-k))! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

Der Additionssatz $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ gilt auch für reelles $n = a \in \mathbb{R}$:

$$\binom{a}{k} + \binom{a}{k+1} = \frac{(a)_k}{k!} + \frac{(a)_{k+1}}{(k+1)!} = \frac{a \cdot (a-1) \cdots (a-k+1)}{k!} + \frac{a \cdot (a-1) \cdots (a-k)}{(k+1)!}$$

$$= \frac{a \cdot (a-1) \cdots (a-k+1) \cdot (k+1)}{(k+1)!} + \frac{a \cdot (a-1) \cdots (a-k+1) \cdot (a-k)}{(k+1)!} = \frac{a \cdot (a-1) \cdots (a-k+1) \cdot [(k+1)+(a-k)]}{(k+1)!}$$

$$= \frac{a \cdot (a-1) \cdots (a-k+1) \cdot [a+1]}{(k+1)!} = \frac{(a+1) \cdot a \cdot (a-1) \cdots ((a+1)-k)}{(k+1)!} = \binom{a+1}{k+1}$$

– 4 –

Aus dem Binomischen Satz folgt:

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \quad \text{und} \quad (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

Die Addition $(1+1)^n + (1-1)^n$ führt auf:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots + \binom{n}{m} = \sum_{i=0}^{m/2} \binom{n}{2i} = 2^{n-1}$$

Hierbei ist m die größte gerade Zahl, die kleiner gleich n ist: $m = 2\cdot[n/2] \leq n$. Die eckige Klammer ist eine Integer-Funktion, das heißt sie schneidet den Nachkommateil ab. Beispiele für $n = 3$ und $n = 4$:

$$(1+1)^3 = \binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 2^3 \qquad (1+1)^4 = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$$

$$(1-1)^3 = \binom{3}{0} - \binom{3}{2} + \binom{3}{2} - \binom{3}{3} = 0^3 \qquad (1-1) = \binom{4}{0} - \binom{4}{1} + \binom{4}{2} - \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$$

$$2\cdot\left[\binom{3}{0} + \binom{3}{2}\right] = 2^3 \qquad 2\cdot\left[\binom{4}{0} + \binom{4}{2} + \binom{4}{4}\right] = 2^4$$

Die Subtraktion $(1+1) - (1-1)$ führt auf:

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots + \binom{n}{m+1} = \sum_{i=0}^{m/2} \binom{n}{2i+1} = 2^{n-1}$$

Hierbei ist m die größte gerade Zahl, die echt kleiner n ist: $m = 2\cdot[(n-1)/2] < n$. Beispiele für $n = 3$ und $n = 4$:

$$(1+1)^3 = \binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 2^3 \qquad (1+1)^4 = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 2^4$$

$$(1-1)^3 = \binom{3}{0} - \binom{3}{1} + \binom{3}{2} - \binom{3}{3} = 0^3 \qquad (1-1)^4 = \binom{4}{0} - \binom{4}{1} + \binom{4}{2} - \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 0^4$$

$$2\cdot\left[\binom{3}{1} + \binom{3}{3}\right] = 2^3 \qquad 2\cdot\left[\binom{4}{1} + \binom{4}{3}\right] = 2^4$$

Es folgt:

$$\binom{3}{0} + \binom{3}{2} = 2^2 \qquad \binom{4}{0} + \binom{4}{2} + \binom{4}{4} = 2^3$$

$$\binom{3}{1} + \binom{3}{3} = 2^2 \qquad \binom{4}{1} + \binom{4}{3} = 2^3$$

-5-

Das 1. Additionstheorem der Binomialkoeffizienten

$$\binom{a}{0}+\binom{a+1}{1}+\binom{a+2}{2}+\ldots+\binom{a+k}{k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{a+i}{i}=\binom{a+k+1}{k}$$

Beweis mit Additionssatz und vollständiger Induktion über k:

$$\binom{\alpha}{k-1}+\binom{\alpha}{k}=\binom{\alpha+1}{k} \qquad \binom{a}{0}=1 \qquad =\binom{a+1}{0}$$

Additionssatz $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\binom{a}{0}+\binom{a+1}{1}=1+\frac{a+1}{1}=a+2=\binom{a+2}{1}$$

$$\binom{a}{0}+\binom{a+1}{1}+\binom{a+2}{2}=\binom{a+2}{1}+\binom{a+2}{2}=\binom{a+3}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{a+i}{i}=\sum_{i=0}^{k-1}\binom{a+i}{i}+\binom{a+k}{k}=\binom{a+k}{k-1}+\binom{a+k}{k}=\binom{a+k+1}{k}$$

Für $a=m \in \mathbb{N}$ gilt der Symmetriesatz und das erste Additionstheorem kann in eine zweite Form gebracht werden:

Mit: $\binom{m+i}{i}=\binom{(m+i)}{(m+i)-i}=\binom{m+i}{m}=\binom{i+m}{m}$

und: $\binom{m+n+1}{n}=\binom{(m+n+1)}{(m+n+1)-n}=\binom{m+n+1}{m+1}=\binom{n+m+1}{m+1}$

folgt: $\sum_{i=0}^{n}\binom{i+m}{m}=\binom{n+m+1}{m+1}$ aus $\sum_{i=0}^{n}\binom{m+i}{i}=\binom{m+n+1}{n}$

Wir werden diese Summe bei den Kombinationen mit Wiederholung benötigen.

— 6 —

Das zweite Additionstheorem des Binomialkoeffizienten

Bei der Multiplikation zweier Binome ergibt sich durch Koeffizientenvergleich das 2. Additionstheorem:

$$(x+y)^{n+m} = (x+y)^n \cdot (x+y)^m = \left[\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot x^{n-i} \cdot y^i \right] \cdot \left[\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \cdot x^{m-j} \cdot y^j \right]$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \binom{n}{i}\binom{m}{j} \cdot x^{(n+m)-(i+j)} \cdot y^{(i+j)} = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n}{i} \cdot \binom{m}{k-i} \cdot x^{(n+m)-k} \cdot y^k$$

$$\stackrel{!}{=} \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} \cdot x^{(n+m)-k} \cdot y^k \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot \binom{m}{k-i} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{k-j} \cdot \binom{m}{j} = \binom{n+m}{k}$$

In der Summe über i und j treten $(n+1) \cdot (m+1)$ Terme auf. In der Summe über k und i treten $\frac{1}{2}\left[n \cdot (n+1) + m \cdot (m+1) \right]$ zusätzliche Terme auf. Um diesen scheinbaren Widerspruch zu klären betrachten wir ein Beispiel mit $n = 2$ und $m = 4$:

$$(x+y)^2 \cdot (x+y)^4 = \left[\binom{2}{0} \cdot x^2 + \binom{2}{1} \cdot xy + \binom{2}{2} \cdot y^2 \right] \cdot \left[\binom{4}{0} x^4 + \binom{4}{1} x^3 y + \binom{4}{2} x^2 y^2 + \binom{4}{3} x y^3 + \binom{4}{4} y^4 \right]$$

$$= \binom{2}{0} \cdot \binom{4}{0} x^6 + \binom{2}{0} \cdot \binom{4}{1} x^5 y + \binom{2}{0}\binom{4}{2} x^4 y^2 + \binom{2}{0}\binom{4}{3} x^3 y^3 + \binom{2}{0}\binom{4}{4} x^2 y^4$$

$$+ \binom{2}{1} \cdot \binom{4}{0} x^5 y + \binom{2}{1}\binom{4}{1} x^4 y^2 + \binom{2}{1}\binom{4}{2} x^3 y^3 + \binom{2}{1}\binom{4}{3} x^2 y^4 + \binom{2}{1}\binom{4}{4} x y^5$$

$$+ \binom{2}{2}\binom{4}{0} x^4 y^2 + \binom{2}{2}\binom{4}{1} x^3 y^3 + \binom{2}{2}\binom{4}{2} x^2 y^4 + \binom{2}{2}\binom{4}{3} x y^5 + \binom{2}{2}\binom{4}{4} y^6$$

Die diagonal verbundenen Terme haben jeweils die gleiche x, y Potenz und werden beim Koeffizientenvergleich zusammengefaßt. Addiert man von rechts oben nach links unten, dann ergibt sich die Summe $\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot \binom{m}{k-i}$. Bei umgekehrter Additionsreihenfolge ergibt sich die Summe $\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{k-j} \cdot \binom{m}{j}$.

Sobald $k > n$ oder $k > m$ ist, durchläuft der Index i bzw. j nicht mehr alle Werte von 0 bis k. Um die

– 7 –

Gesetzmäßigkeit zu erkennen, betrachten wir nun die Summen zu jedem x,y Koeffizienten getrennt. Jede Zeile entspricht einem $k = 0,1,2,\dots,n+m$:

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \sum_{i=0}^{0}\binom{2}{i}\cdot\binom{4}{0-i} = \binom{2}{0}_1\cdot\binom{4}{0}_1 = \qquad = \binom{6}{0}_1$$

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \sum_{i=0}^{1}\binom{2}{i}\cdot\binom{4}{1-i} = \binom{2}{0}_1\cdot\binom{4}{1}_4 + \binom{2}{1}_2\cdot\binom{4}{0}_1 \qquad = \binom{6}{1}_6$$

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \sum_{i=0}^{2}\binom{2}{i}\cdot\binom{4}{2-i} = \binom{2}{0}_1\cdot\binom{4}{2}_6 + \binom{2}{1}_2\cdot\binom{4}{1}_4 + \binom{2}{2}_1\cdot\binom{4}{0}_1 = \binom{6}{2}_{15}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \sum_{i=0}^{2}\binom{2}{i}\cdot\binom{4}{3-i} = \binom{2}{0}_1\cdot\binom{4}{3}_4 + \binom{2}{1}_2\cdot\binom{4}{2}_6 + \binom{2}{2}_1\cdot\binom{4}{1}_4 = \binom{6}{3}_{20}$$

$$\sum_{i=k-m}^{n}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \sum_{i=0}^{2}\binom{2}{i}\cdot\binom{4}{4-i} = \binom{2}{0}_1\cdot\binom{4}{4}_1 + \binom{2}{1}_2\cdot\binom{4}{3}_4 + \binom{2}{2}_1\cdot\binom{4}{2}_6 = \binom{6}{4}_{15}$$

$$\sum_{i=k-m}^{n}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \sum_{i=1}^{2}\binom{2}{i}\cdot\binom{4}{5-i} = \qquad \binom{2}{1}_2\cdot\binom{4}{4}_1 + \binom{2}{2}_1\cdot\binom{4}{3}_4 = \binom{6}{5}_6$$

$$\sum_{i=k-m}^{n}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \sum_{i=2}^{2}\binom{2}{i}\cdot\binom{4}{6-i} = \qquad \binom{2}{2}_1\cdot\binom{4}{4}_1 = \binom{6}{6}_1$$

Man erkennt, daß das Indexintervall der Summenbildung (für verschiedene k) in drei Abschnitte zefällt. Der erste Abschnitt gehört zu allen k, die kleiner gleich n und m sind. Der dritte Abschnitt gehört zu allen k, die größer gleich n und m sind. Der mittlere Abschnitt wird nur für $|n-m| \geqslant 2$ benötigt.

Insgesamt kann das zweite Additionstheorem mit natürlichen Potenzen $n,m \in \mathbb{N}$ daher folgende Formen annehmen:

— 8 —

n, m beliebig	$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\cdot\binom{m}{k-i} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{k-j}\cdot\binom{m}{j} = \binom{n+m}{k}$	
$k \leq n$		
$k \leq m$	$j = k-i = k \dots 0$	$i = k-j = k \dots 0$
$n < m$	$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\cdot\binom{m}{k-i} = \sum_{j=k-n}^{k} \binom{n}{k-j}\cdot\binom{m}{j} = \binom{n+m}{k}$	
$k > n$		
$k \leq m$	$j = k-i = k \dots k-n$	$i = k-j = n \dots 0$
$n > m$	$\sum_{i=k-m}^{k} \binom{n}{i}\cdot\binom{m}{k-i} = \sum_{j=0}^{m} \binom{n}{k-j}\cdot\binom{m}{j} = \binom{n+m}{k}$	
$k \leq n$		
$k > m$	$j = k-i = m \dots 0$	$i = k-j = k \dots k-m$
n, m beliebig	$\sum_{i=k-m}^{n} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \sum_{j=k-n}^{m} \binom{n}{k-j}\cdot\binom{m}{j} = \binom{n+m}{k}$	
$k \geqslant n$		
$k \geqslant m$	$j = k-i = m \dots k-n$	$i = k-j = n \dots k-m$

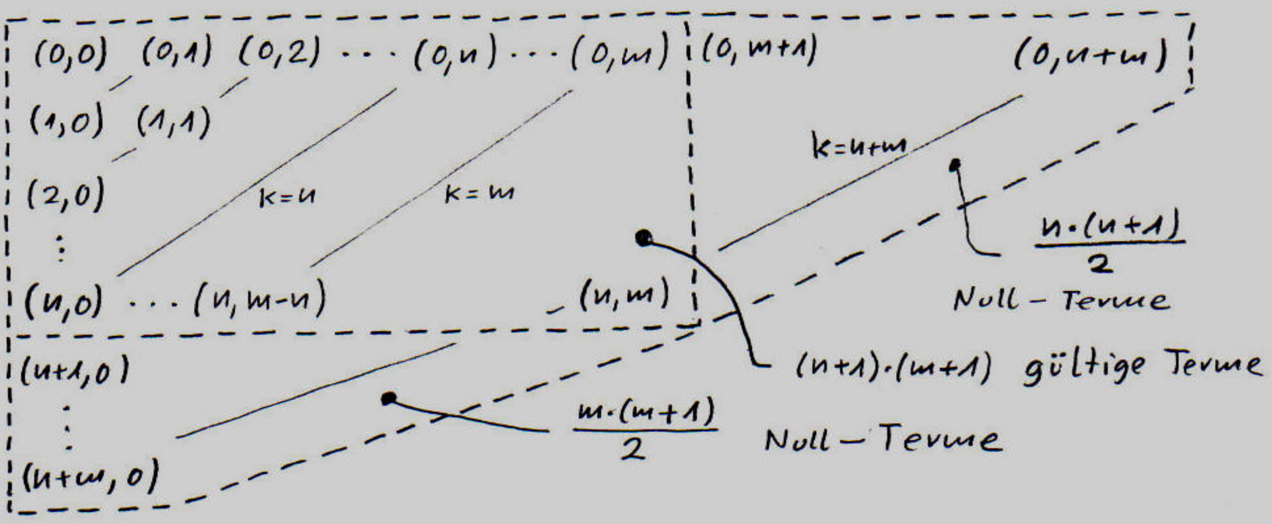
Mit diesen eingeschränkten Indexintervallen wird der anfängliche Widerspruch der unterschiedlichen Termzahlen geklärt. Beachtet man, daß für den Binomialkoeffizienten gilt: $\binom{n}{i} = \binom{m}{j} = 0$ für alle $i > n$ bzw. $j > m$, dann kann man für alle $k = 0, 1, 2, \dots, n+m$ schreiben:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\cdot\binom{m}{k-i} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{k-j}\binom{m}{j} = \binom{n+m}{k}$$

Mit $k = m = n$ und dem Symmetriesatz ergibt sich:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\cdot\binom{n}{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\cdot\binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$$

In dem folgenden Schema kann die Indexintervallbildung und Summationsstruktur mit den Termzahlen leicht überschaut werden. Dabei bedeutet $(i,j) = \binom{n}{i}\cdot\binom{m}{j}$. Es wird entlang der diagonalen Verbindung summiert:



Bisher haben wir nur natürliche Potenzen $n, m \in \mathbb{N}$ betrachtet. Das Potenzgesetz $(x+y)^a \cdot (x+y)^b = (x+y)^{a+b}$ gilt jedoch auch für reelle Potenzen $a, b \in \mathbb{R}$. Für reelles a, b werden die Binomen in eine unendliche binomische Reihe entwickelt:

$$(x+y)^a = x^a \cdot (1+z)^a = x^a \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \binom{a}{i} \cdot z^i \qquad z = \frac{y}{x}$$

$$(x+y)^b = x^b \cdot (1+z)^b = x^b \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{b}{j} \cdot z^j \qquad \text{für } y < x$$

$$(x+y)^a \cdot (x+y)^b = x^{a+b} \cdot \left[\sum_{i=0}^{\infty} \binom{a}{i} \cdot z^i \right] \cdot \left[\sum_{j=0}^{\infty} \binom{b}{j} \cdot z^j \right]$$

$$= x^{a+b} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{a}{i} \cdot \binom{b}{j} \cdot z^{i+j} = x^{a+b} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} \binom{a}{i} \binom{b}{k-i} \cdot z^k$$

$$\overset{!}{=} x^{a+b} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a+b}{k} \cdot z^k = x^{a+b} \cdot (1+z)^{a+b} = (x+y)^{a+b}$$

Diese Cauchy-Produktbildung liefert uns nun die Erweiterung des zweiten Additionstheorems auf die reellen Zahlen a und b:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{a}{i} \binom{b}{k-i} = \sum_{j=0}^{k} \binom{a}{k-j} \cdot \binom{b}{j} = \binom{a+b}{k}$$

— 10 —

Der Polynomialkoeffizient (auch Multinomialkoeffizient)

Wenn man den Ausdruck $(x+y)^n$ ausmultipliziert und gleiche Monome zusammenfaßt, erhält man die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$.

Nun könnten in der Klammer auch mehr als zwei Variablen stehen: $(x_1+x_2+\ldots+x_r)^n$. Wenn man diesen Ausdruck ausmultipliziert und wieder gleiche Monome zusammenfaßt, erscheinen Polynomialkoeffizienten. Wir betrachten folgendes Beispiel:

$$(x_1+x_2+x_3)^2 = x_1x_1+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_1+x_2x_2+x_2x_3+x_3x_1+x_3x_2+x_3x_3$$

$$= x_1x_1+x_2x_2+x_3x_3+(x_1x_2+x_2x_1)+(x_1x_3+x_3x_1)+(x_2x_3+x_3x_2)$$

$$= \underbrace{\binom{2}{2,0,0}}_{1} x_1^2x_2^0x_3^0 + \underbrace{\binom{2}{0,2,0}}_{1} \cdot x_1^0x_2^2x_3^0 + \underbrace{\binom{2}{0,0,2}}_{1} x_1^0x_2^0x_3^2 + \underbrace{\binom{2}{1,1,0}}_{2} x_1^1x_2^1x_3^0 + \underbrace{\binom{2}{1,0,1}}_{2} x_1^1x_2^0x_3^1 + \underbrace{\binom{2}{0,1,1}}_{2} x_1^0x_2^1x_3^1$$

Allgemein ergibt sich folgende Polynomialentwicklung:

$$(x_1+x_2+\ldots+x_r)^1 = \sum_{p_1=1}^{r} x_{p_1} = \sum_{\substack{n_j\in\{0,1\} \\ \Sigma n_j = 1}} \binom{1}{n_1,n_2,\ldots,n_r} \cdot x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_r^{n_r}$$

$$(x_1+x_2+\ldots+x_r)^2 = \sum_{p_1=1}^{r}\sum_{p_2=1}^{r} x_{p_1}x_{p_2} = \sum_{\substack{n_j\in\{0,1,2\} \\ \Sigma n_j = 2}} \binom{1}{n_1,n_2,\ldots,n_r} \cdot x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_r^{n_r}$$

$$(x_1+x_2+\ldots+x_r)^3 = \sum_{p_1=1}^{r}\sum_{p_2=1}^{r}\sum_{p_3=1}^{r} x_{p_1}x_{p_2}x_{p_3} = \sum_{\substack{n_j\in\{0,1,2,3\} \\ \Sigma n_j = 3}} \binom{3}{n_1,n_2,\ldots,n_r} \cdot x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_r^{n_r}$$

$$(x_1+x_2+\ldots+x_r)^n = \sum_{p_1=1}^{r}\sum_{p_2=1}^{r}\cdots\sum_{p_n=1}^{r} x_{p_1}x_{p_2}\cdots x_{p_n} = \sum_{\substack{n_j\in\{0,1\ldots n\} \\ \Sigma n_j = n}} \binom{n}{n_1,\ldots,n_r} \cdot x_1^{n_1}\cdots x_r^{n_r}$$

Für $n=1$ gibt es folgende Polynomialkoeffizienten:

$$\binom{1}{n_1,n_2,\ldots,n_r} \in \left\{ \binom{1}{1,0,\ldots,0}, \binom{1}{0,1,\ldots,0}, \ldots, \binom{1}{0,0,\ldots,1,0}, \binom{1}{0,0,\ldots,0,1} \right\}$$

$$\binom{1}{n_1,n_2,\ldots,n_r} = 1 \quad \text{für alle } n_j \in \{0,1\} \quad \text{mit } \sum_{j=1}^{r} n_j = 1$$

– 11 –

Für $n=2$ gilt:

$$\binom{2}{n_1, n_2, n_3, \ldots, n_r} = \left\{ \begin{array}{l} \binom{2}{2,0,0,\ldots,0}, \binom{2}{0,2,0,\ldots,0}, \ldots, \binom{2}{0,0,\ldots,2} \\ \binom{2}{1,1,0,\ldots,0}, \binom{2}{1,0,1,\ldots,0}, \ldots, \binom{2}{0,0,\ldots,1,1} \end{array} \right\}$$

Der Ausdruck $(x_1+x_2+\ldots+x_r)^2$ läßt sich als quadratische Matrix schreiben, wobei die Diagonalelemente x_i^2 nur einmal auftreten und die übrigen Produkte $x_i x_j = x_j x_i$ zweimal erscheinen. Daraus folgt für die Polynomialkoeffizienten:

$$\binom{2}{2,0,0,\ldots,0} = \binom{2}{0,2,0,\ldots,0} = \ldots = \binom{2}{0,0,\ldots,0,2} = 1$$

$$\binom{2}{1,1,0,\ldots,0} = \binom{2}{1,0,1,\ldots,0} = \ldots = \binom{2}{0,0,\ldots,1,1} = 2$$

Für $n=3$ finden wir drei verschiedene Polynomialkoeffizienten:

$$\binom{3}{3,0,0,\ldots,0} = \binom{3}{0,3,0,\ldots 0} = \ldots = 1 \quad \text{zu } x_1x_1x_1 \text{ bzw. } x_2x_2x_2 \ldots$$

$$\binom{3}{2,1,0,\ldots,0} = \ldots = 3 \quad \text{zu } x_1x_1x_2 + x_1x_2x_1 + x_2x_1x_1$$

$$\binom{3}{1,1,1,\ldots,0} = \ldots = 6 \quad \text{zu } \begin{array}{l} x_1x_2x_3 + x_2x_1x_3 + x_3x_1x_2 \\ x_1x_3x_2 + x_2x_3x_1 + x_3x_2x_1 \end{array}$$

Man kann nun in $x_{P_1}x_{P_2}x_{P_3} = \prod_{i=1}^{3} x_{P_i}$ für P_1, P_2, P_3 beliebige Zahlen aus $1 \ldots r$ wählen. Beziehen sich alle Platznummern P_i auf eine Variable x_j also $\prod_{i=1}^{3} x_{P_i} = x_j^3$ dann gibt es nur ein passendes Monom. Für $P_1 = P_2 \neq P_3$, $P_1 \neq P_2 = P_3$ und $P_1 = P_3 \neq P_2$ gibt es 3 passende Monome. Und für $P_1 \neq P_2 \neq P_3$ 6 passende Monome.

Nun konnten wir für die Potenzen $n=1,2,3$ die Polynomialkoeffizienten veranschaulichen und ihre Zahlenwerte angeben.

— 12 —

Um einen allgemeinen Ausdruck des Polynomialkoeffizienten für höhere Potenzen n zu finden, benutzen wir folgenden Ansatz: Bei dem Summenausdruck $\sum_{p_1=1}^{r}\sum_{p_2=1}^{r}\cdots\sum_{p_n=1}^{r} x_{p_1}\cdot x_{p_2}\cdots x_{p_n}$ besteht jedes Monom $x_{p_1}\cdot x_{p_2}\cdots x_{p_n} = \prod_{i=1}^{n} x_{p_i}$ aus n Faktoren x_{p_j}. Jede Platznummer p_i wählt ein $x_j \in \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ aus. Nun kann gezählt werden, mit welcher Anzahl ein bestimmtes x_j in dem Monom Auftritt:

$A(x_{p_i} = x_1) = n_1$

$A(x_{p_i} = x_2) = n_2$

$\vdots$

$A(x_{p_i} = x_j) = n_j$.

$\vdots$

$A(x_{p_i} = x_r) = n_r$

Mit $n_j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ und $\sum_{j=1}^{r} n_j = n$

Damit gilt für das Monom

$$x_{p_1} x_{p_2} \cdots x_{p_n} = x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}$$

Unser gesuchter Polynomialkoeffizient ist gerade die Anzahl der Monome $x_{p_1}\cdot x_{p_2}\cdots x_{p_n}$ welche sich zu dem Term $x_1^{n_1} x_2^{n_2}\cdots x_r^{n_r}$ zusammen fassen lassen. Wir nehmen an, daß in den Monomen alle möglichen unterscheidbaren Stellungen der verschiedenen x_j auftreten. Nun kann man kombinatorisch argumentieren:

Die erste Variable x_1 kann an n Plätzen stehen, das zweite x_1 an $(n-1)$ Plätzen, das dritte x_1 an $(n-2)$ Plätzen und schließlich das n_1-te x_1 an $(n-n_1+1)$ Plätzen. Für unterscheidbare x_1 gibt es also insgesamt $n\cdot(n-1)(n-2)\dots(n-n_1+1) = \frac{n!}{(n-n_1)!}$ Plätze.

Die ist die Anzahl der Variationen ohne Wiederholung von n Elementen zur Klasse n_1. Weil die einzelnen x_1 ununterscheidbar sind, muß nun noch durch die Anzahl der möglichen Permutationen $n_1!$ geteilt werden. Daher gibt es $\frac{n!}{(n-n_1)!\,n_1!} = \binom{n}{n_1}$ unterscheidbare Stellungen der x_1. Dies ist nun die Anzahl der Kombinationen von n Elementen (Plätze p_i) ohne Wiederholung (pro Platz ein x_1) zur Klasse n_1 (Anzahl der Faktoren).

— 13 —

Für die zweite Variable x_2 bleiben nun noch $(n-n_1)$ freie Plätze. Das zweite x_2 kann an $(n-n_1-1)$ Plätzen stehen. Das setzt sich nun wieder fort bis zum n_2-ten x_2, welches noch $(n-n_1-n_2+1)$ freie Plätze besetzen kann. Für die x_2 gäbe es also insgesamt $(n-n_1)\cdot(n-n_1-1)\cdots(n-n_1-n_2+1) = \frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)!}$ Plätze. Wegen der Ununterscheidbarkeit der x_2 muß nun wieder durch $n_2!$ geteilt werden. Somit gibt es nun $\frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)!\,n_2!} = \binom{n-n_1}{n_2}$ unterscheidbare Plätze für die x_2.

Für die dritte Variable x_3 bleiben nun noch $(n-n_1-n_2)$ freie Plätze. Ihre Anzahl ergibt sich wiederum zu

$$\frac{(n-n_1-n_2)!}{(n-n_1-n_2-n_3)!\,n_3!} = \binom{n-n_1-n_2}{n_3}$$

Für die letzte Variable x_r gibt es schließlich:

$$\frac{(n-n_1-n_2-\ldots-n_{r-1})!}{\underbrace{(n-n_1-n_2\ldots-n_r)!}_{0!=1}\,n_r!} = \binom{n-n_1-n_2-\ldots-n_{r-1}}{n_r}$$

unterscheidbare Stellungen.

Die Gesamtzahl aller unterscheidbaren Stellungen der untereinander unabhängigen $x_j \in \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ ist das einfache Produkt der Platzanzahl der einzelnen x_j. Das ist nun der gesuchte Polynomialkoeffizient:

$$\frac{n!}{\cancel{(n-n_1)!}\,n_1!}\cdot\frac{\cancel{(n-n_1)!}}{\cancel{(n-n_1-n_2)!}\,n_2!}\cdot\frac{\cancel{(n-n_1-n_2)!}}{\cancel{(n-n_1-n_2-n_3)!}\,n_3!}\cdots\frac{\cancel{(n-n_1-n_2-\ldots-n_{r-1})!}}{\underbrace{(n-n_1-n_2-\ldots-n_r)!}_{0!=1}\,n_r!}$$

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_r!}$$

— 14 —

Dieses Resultat kann nun mit einem Induktionsschritt von n nach $n+1$ abgesichert werden. Dabei werden wir einen Additionssatz der Polynomialkoeffizienten finden:

$$(x_1+x_2+\ldots+x_r)^n \cdot (x_1+x_2+\ldots+x_r) = \sum_{|n|=n} \binom{n}{n_1,\ldots,n_r} \cdot x_1^{n_1}\cdots x_r^{n_r} \cdot (x_1+\ldots+x_r)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \sum_{\Sigma n_j = n} \binom{n}{n_1\ldots n_r} x_1^{n_1}\cdots x_i^{n_i+1}\cdots x_r^{n_r} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{\Sigma n_j = n+1} \binom{n}{n_1\ldots n_i-1\ldots n_r} \cdot x_1^{n_1}\cdots x_r^{n_r}$$

$$\overset{!}{=} \sum_{\Sigma n_j = n+1} \binom{n+1}{n_1,n_2,\ldots,n_r} x_1^{n_1}\cdot x_2^{n_2}\cdots x_r^{n_r} = (x_1+x_2+\ldots+x_r)^{n+1}$$

Für den Induktionsschritt von n auf $n+1$ muß folgender Additionssatz der Polynomialkoeffizienten erfüllt sein:

$$\sum_{i=1}^{r} \binom{n}{n_1,\ldots,n_i-1,\ldots,n_r} = \binom{n+1}{n_1,n_2,\ldots,n_r} \qquad n_i \in \{0,1,2,\ldots,n+1\} \text{ und } \sum n_i = n+1$$

Nun setzen wir den expliziten Ausdruck für den Polynomialkoeffizienten ein:

$$\sum_{i=1}^{r} \binom{n}{n_1,\ldots,n_i-1,\ldots,n_r} = \sum_{i=1}^{r} \frac{n!}{n_1!\cdots(n_i-1)!\cdots n_r!} = \sum_{i=1}^{r} \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}\cdot n_i$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}\cdot(n+1) = \frac{(n+1)!}{n_1!n_2!\cdots n_r!} = \binom{n+1}{n_1,n_2,\ldots,n_r}$$

Wie man sieht, werden in der Summe nur die Terme gezählt, bei denen $n_i \neq 0$ ist, da gilt: $\frac{1}{(-1)!} = \frac{0}{0!} = \frac{0}{1} = 0.$

Als Induktionsstart und zur Veranschaulichung des Additionssatzes betrachten wir den Schritt von $n=2$ zu $n=3$. Die Werte der möglichen Polynomialkoeffizienten wurden am Anfang aus der unmittelbaren Anschauung hergeleitet.

$$\underbrace{\binom{2}{3-1,0,0,0}}_{1} + \underbrace{\binom{2}{3,-1,0,0}}_{0} + \underbrace{\binom{2}{3,0,-1,0}}_{0} + \underbrace{\binom{2}{3,0,0,-1}}_{0} = \binom{3}{3,0,0,0} = \frac{3!}{3!0!0!0!} = 1$$

$$\underbrace{\binom{2}{2-1,1,0,0}}_{2} + \underbrace{\binom{2}{2,1-1,0,0}}_{1} + \underbrace{\binom{2}{2,1,-1,0}}_{0} + \underbrace{\binom{2}{2,1,0,-1}}_{0} = \binom{3}{2,1,0,0} = \frac{3!}{2!1!0!0!} = 3$$

$$\underbrace{\binom{2}{1-1,1,1,0}}_{2} + \underbrace{\binom{2}{1,1-1,1,0}}_{2} + \underbrace{\binom{2}{1,1,1-1,0}}_{2} + \underbrace{\binom{2}{1,1,1,-1}}_{0} = \binom{3}{1,1,1,0} = \frac{3!}{1!1!1!0!} = 6$$

Übrigens ergibt sich mit $x_1 = x_2 = \ldots = x_r = 1$ die folgende Beziehung:

$$\sum_{\sum n_j = n} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = r^n \qquad \text{da} \quad \sum_{j=1}^{r} x_j = r$$

Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ ist der Polynomialkoeffizient für $r=2$:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k} \quad \Leftrightarrow \quad (x_1+x_2)^n = \sum_{n_1+n_2=2} \binom{2}{n_1, n_2} \cdot x_1^{n_1} x_2^{n_2}$$

mit $n_1 = k$, $n_2 = n-k$ folgt: $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{n_1!\, n_2!}$

Der Additionssatz des Binomialkoeffizienten ist ebenso im Additionssatz des Polynomialkoeffizienten enthalten:

$$\sum_{i=1}^{2} \binom{n}{\ldots, n_i - 1, \ldots} = \binom{n}{n_1-1, n_2} + \binom{n}{n_1, n_2-1} = \binom{n+1}{n_1, n_2}$$

Mit:

$n_1 = k+1$

$n_2 = n-k$

$n_1 + n_2 = n+1$

$$\binom{n}{(k+1)-1, n-k} + \binom{n}{k+1, (n-k)-1} = \binom{n}{k, n-k} + \binom{n}{k+1, n-(k+1)}$$

$$= \binom{n+1}{k+1, \underbrace{(n+1)-(k+1)}_{n-k}} = \binom{n+1}{k+1} \overset{\text{OK}}{=} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

— 16 —