Wolfgang Renner
Gimbacher Weg 34 www.institut-wolfgang-renner.de
D-65779 Kelkheim institut-wolfgang-renner@t-online.de
Telefon: 06195 4161

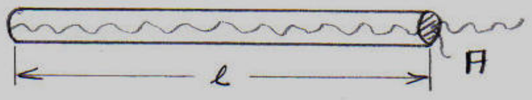
Kelkheim den 17. März 2015

Die Hohlraumstrahlung

Zu Energiedichte und Intensität:

ϱ = Energiedichte

J = Intensität

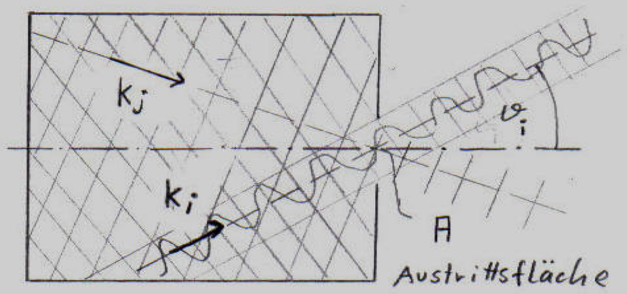


$E = \varrho \cdot V$ Strahlungsenergie in V

$$t = \frac{l}{c} \qquad E = \varrho \cdot V = \varrho \cdot l \cdot A$$

$$J_0 = \frac{P}{A} = \frac{E}{A \cdot t} = \frac{\varrho \cdot \cancel{l} \cdot \cancel{A}}{\cancel{A} \cdot \frac{\cancel{l}}{c}} = c \cdot \varrho$$

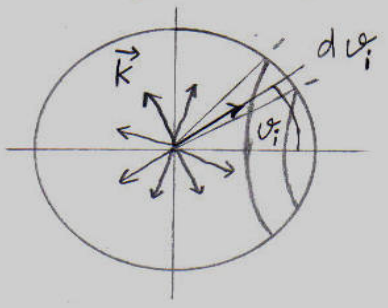
Für eine ebene Welle



Ein Hohlraum sei mit isotroper el.mag. Strahlung gefüllt. Gesucht ist die Strahlungsleistung pro Fläche, d.h. die Intensität der Strahlung, die aus dem Loch mit der Fläche Austritt.

Modell:

Die isotrope Strahlung setzen wir aus N ebenen Wellen zusammen, deren $\vec{k}$ Vektoren gleichmäßig in alle Raumrichtungen zeigen. Pro Welle gilt: $J_0 = c \cdot \varrho_0$



n_i sei die Zahl der $\vec{k}$ die in den Raumwinkel $d\Omega_i$ zeigen, für den gilt:

$\vartheta_i \leq \vartheta < \vartheta_i + d\vartheta_i$ Nun gilt:

$$\frac{n_i}{N} = \frac{d\Omega_i}{\Omega} = \frac{1}{2} \sin\vartheta_i \, d\vartheta_i$$ Symmetrisch in φ !

Durch A geht $P_{0i} = J_0 \cdot A \cdot \cos\vartheta_i$ pro ebene Welle.

$$\Rightarrow P_{ges} = \sum_i n_i P_{0i} = \sum_i N \cdot \frac{1}{2} \sin\vartheta_i \, d\vartheta_i \cdot J_0 \cdot A \cdot \cos\vartheta_i$$

$$P_{ges} = A \cdot N \cdot J_0 \sum_i \frac{1}{2} \sin\vartheta_i \cos\vartheta_i \, d\vartheta_i$$

P = Strahlungs-Leistung. (1)

ϑ_i geht von 0 bis $\frac{\pi}{2}$. Die Summe kann durch ein Integral ersetzt werden.

$J_{ges} = P_{ges} / A =$

$$= N \cdot J_0 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin\vartheta \cos\vartheta \, d\vartheta = \frac{1}{4} N \cdot J_0 \int_0^{\pi/2} \sin(2\vartheta)\, d\vartheta$$

$$= \frac{1}{4} N \cdot J_0 \cdot \left[-\frac{1}{2} \cos(2\vartheta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} N \cdot J_0 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{4} N \cdot J_0$$

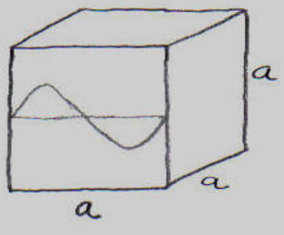
Für die gesammte Energiedichte ϱ gilt $\varrho = \sum_N \varrho_0 = N \cdot \varrho_0$

mit $J_0 = c \cdot \varrho_0$ wird $J_{ges} = \frac{1}{4} N \cdot c \cdot \varrho_0 = \frac{c}{4} \varrho$

Das heißt die gesammte Intensität beträgt $J_{ges} = \frac{c}{4} \varrho$.

Diese wird in einen Halbraum mit dem Raumwinkel $\Omega_H = 2\pi$ gestrahlt. Die Intensität pro Einheitsraumwinkel ist daher: $J = \frac{1}{2\pi} J_{ges} = \frac{c}{8\pi} \varrho$

Das Raleigh - Jeans'sche Gesetz:



Der Hohlraum sei mit stehenden Lichtwellen gefüllt. Die Wellengleichung ergibt mit der Randbedingung $\vec{E} = 0$ auf den Hohlraumwänden folgende Lösung:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_0 \cdot \sin(k_x x) \cdot \sin(k_y \cdot y) \cdot \sin(k_z \cdot z) \cdot \sin(\omega t)$$

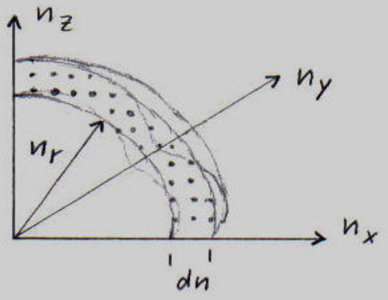
Die Randbedingung legt fest: $k_x \cdot a = n_x \pi \quad k_x = \frac{n_x \pi}{a}$

$n_x \in \mathbb{N}$. Das Gleiche gilt für k_y und k_z.

Mit $\frac{\omega}{c} = k \quad \frac{\omega^2}{c^2} = k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\pi^2}{a^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$

2

$$\omega^2 = \frac{c^2\pi^2}{a^2}\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right) = \frac{c^2\pi^2}{a^2} n^2 \quad \text{bzw.} \quad \omega = \frac{c\pi}{a} n$$



Die Anzahl dN der n_x, n_y, n_z Tripel mit $n_r \leq n < n_r + dn$ entspricht dem Volumen der Kugelschale im positiven Oktanten:

$$dN = \frac{1}{8}\, 4\pi n^2\, dn = \frac{\pi}{2} n^2\, dn$$

Mit $n^2 = \frac{a^2}{\pi^2 c^2}\omega^2$ und $dn = \frac{a}{\pi c} d\omega$ ergibt sich die Zustandsdichte:

$$dN = \frac{\pi}{2} n^2 dn = \frac{\pi}{2} \frac{a^2}{\pi^2 c^2} \omega^2 \cdot \frac{a}{\pi c} d\omega = \frac{a^3\omega^2}{2\pi^2 c^3} d\omega$$

Jede diese Wellen hat zwei Polarisationsfreiheitsgrade. Damit ergibt sich:

$$dN' = 2 \cdot dN = \frac{a^3\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega$$

Der Gleichverteilungssatz der statistischen Thermodynamik ordnet jedem Freiheitsgrad eine Energie von $\frac{1}{2} kT$ zu. Eine Welle ist eine Schwingung und Schwingungen haben einen potentiellen und kinetischen Freiheitsgrad. Daher wird jedem Schwingungsfreiheitsgrad eine Energie von kT zugeordnet.

$$\Rightarrow \quad dE = dN' \cdot kT = \frac{a^3\omega^2}{\pi^2 c^3} \cdot kT\, d\omega \quad \Big/ \quad V = a^3$$

Die Energiedichte $\varrho(\omega, T)$ ist: $\varrho(\omega, T) = \frac{dE}{V\, d\omega}$

$$\Rightarrow \quad \varrho(\omega, T) = \frac{kT}{\pi^2 c^3} \cdot \omega^2$$

Das ist das gesuchte Raleigh – Jeans Gesetz.

3

Die Planck'sche Strahlungsformal (nach Einstein):

Einstein ging von folgendem Ansatz aus:
Die Atome des Kastens sollen zwei Energiezustände E_m und E_n haben ($E_m > E_n$).
Ein Übergang von E_m nach E_n bewirkt eine Photonenemission mit der Frequenz ω : $\hbar\omega = E_m - E_n$
Ein Übergang von E_n nach E_m findet bei Photonenabsorbtion statt.
N_m sei die Zahl der Atome im Energiezustand E_m und N_n die in E_n. Es kann spontane und durch Strahlung induzierte Emission statt finden.
Die Wahrscheinlichkeit, daß ein spontaner Emissionsvorgang pro Zeiteinheit statt findet sei $W_e' = a_{mn}$
Die Wahrscheinlichkeit für induzierte Emission sei:
$W_e'' = b_{mn} \cdot \rho(\omega, T)$ Und die für Absorbtion sei:
$W_a = b_{nm} \cdot \rho(\omega, T)$ $\rho(\omega,T)$ ist dabei die Energiedichte des anwesenden Strahlungsfeldes.
Im Strahlungsgleichgewicht muß die Übergangszahl gleich sein: $N_m(W_e' + W_e'') = N_n \cdot W_a$ bzw.

$$N_m(a_{mn} + b_{mn} \cdot \rho(\omega,T)) = N_n \cdot b_{nm} \cdot \rho(\omega, T)$$

Nun besagt die Quantenstatistik: $\dfrac{N_m}{N_n} = \dfrac{e^{-\frac{E_m}{kT}}}{e^{-\frac{E_n}{kT}}}$

$$\Rightarrow e^{-\frac{E_m}{kT}}(a_{mn} + b_{mn} \cdot \rho(\omega,T)) = e^{-\frac{E_n}{kT}} \cdot b_{nm} \cdot \rho(\omega, T)$$

④

Wir betrachten nun den Grenzfall sehr großer Temperaturen:

$$T \to \infty \quad \Rightarrow \quad e^{-\frac{E_{mn}}{kT}} \to 1 \qquad \varrho(\omega, T) \to \infty$$

Da die Strahlungsenergiedichte für $T \to \infty$ auch gegen ∞ strebt, kann a_{mn} vernachlässigt werden:

$$1 \cdot b_{mn} \cdot \varrho(\omega, T) = 1 \cdot b_{nm} \cdot \varrho(\omega, T) \qquad \text{bzw.} \quad b_{mn} = b_{nm}$$

Damit kann die Gleichung nach $\varrho(\omega, T)$ gut aufgelöst werden:

$$e^{-\frac{E_m}{kT}} \cdot a_{mn} = e^{-\frac{E_n}{kT}} \cdot b_{nm} \cdot \varrho(\omega, T) - e^{-\frac{E_m}{kT}} \cdot b_{nm}\, \varrho(\omega, T)$$

$$\text{bzw.:} \quad \varrho(\omega, T) = \frac{a_{mn}}{b_{nm}} \cdot \frac{e^{-\frac{E_m}{kT}}}{e^{-\frac{E_n}{kT}} - e^{-\frac{E_m}{kT}}}$$

$$\varrho(\omega, T) = \frac{a_{mn}}{b_{nm}} \cdot \frac{1}{e^{\frac{E_m - E_n}{kT}} - 1} = \frac{a_{mn}}{b_{nm}} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

Um nun auch noch das Verhältnis $\frac{a_{mn}}{b_{mn}}$ zu ermitteln, betrachten wir den Grenzfall kleiner Frequenzen für den gilt: $\hbar\omega \ll kT$

$$\varrho(\omega, T) = \frac{a_{mn}}{b_{nm}} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{\hbar\omega}{kT} + \ldots\right) - 1} = \frac{a_{mn}}{b_{nm}} \cdot \frac{kT}{\hbar\omega}$$

In diesem Bereich gilt das Raleigh-Jeans Gesetz. Gleichsetzen ergibt:

$$\varrho(\omega, T) = \frac{a_{mn}}{b_{nm}} \cdot \frac{kT}{\hbar\omega} = \frac{kT}{\pi^2 c^3}\,\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_{mn}}{b_{nm}} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}$$

5

$$\Rightarrow \quad \rho(\omega,T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}\cdot\frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}$$

Das ist die gesuchte Planck'sche Strahlungsfunktion. Es gilt:

$$\frac{dE}{V} = \rho(\omega,T)\,d\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}\cdot\frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}\,d\omega$$

$$\frac{dE}{V} = \rho(\nu,T)\,d\nu = 8\pi\,\frac{h\nu^3}{c^3}\cdot\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}\,d\nu$$

$$\frac{dE}{V} = \rho(\lambda,T)\,d\lambda = 8\pi\,\frac{hc}{\lambda^5}\cdot\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1}\,d\lambda$$

Mit:

$$\omega = \frac{c}{\lambda}$$

$$|d\omega| = \frac{c}{\lambda^2}\,d\lambda$$

$$d\omega = 2\pi\,d\nu$$

Die Strahlungsintensität eines schwarzen Strahlers ergibt sich damit zu:

$$J_{ges}(\omega,T) = \frac{c}{4}\,\rho(\omega,T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2}\cdot\frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}$$

$$J_{ges}(\nu,T) = \frac{c}{4}\,\rho(\nu,T) = 2\pi\,\frac{h\nu^3}{c^2}\cdot\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$$

Gesamt-Strahlleistung pro Flächeneinheit.

$$J_1(\nu,T) = \frac{c}{8\pi}\,\rho(\nu,T) = \frac{h\nu^3}{c^2}\cdot\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$$

pro Einheits-Raumwinkel.

6

Das Planck'sche Gesetz (nach Planck):

Das Raleigh-Jeans Gesetz gab uns die Zustandsdichte:

$$g(\omega) = \frac{dN(\omega)}{d\omega} = \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3}$$

Die Energieverteilung $V \cdot \rho(\omega, T)$ erhielten wir dadurch, daß wir jedem Schwingungsfreiheitsgrad die Energie $E = kT$ zuordneten.

Planck ging nun davon aus, daß der Hohlraum aus Oszillatoren besteht, die mit der Frequenz ω schwingen und deren Energiewerte ε_n nur ganzzahlige Vielfache von einer der Frequenz proportionalen Energie ε sind.

$$\varepsilon = \hbar\omega \qquad \varepsilon_n = n \cdot \varepsilon = n \cdot \hbar\omega$$

$\hbar$ = Planck'sche Konstante

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Oszillator den Energiewert ε_n annimmt, soll durch den Boltzmannfaktor $e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}}$ festgelegt werden.

Der Erwartungswert $\bar{\varepsilon}$ der Oszillatoren mit der Frequenz ω ergibt sich daher zu:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cdot e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cdot e^{-\beta\varepsilon_n}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\varepsilon_n}} \qquad \text{mit } \beta = \frac{1}{kT}$$

Mit der Zustandssumme: $Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\varepsilon_n}$

$$\ln Z = \ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\varepsilon_n} \qquad \frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z = \frac{1}{Z}\frac{\partial}{\partial\beta} Z$$

7

$$-\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z = -\frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\varepsilon_n}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} -\varepsilon_n \cdot e^{-\beta\varepsilon_n} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n \cdot e^{-\beta\varepsilon_n}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\varepsilon_n}} = \bar{\varepsilon}$$

Mit: $\varepsilon_n = n \cdot \hbar\omega$

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\varepsilon_n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega\cdot n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-\beta\hbar\omega}\right)^n = \frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}$$

$$\ln(Z) = \ln(1) - \ln\left(1-e^{-\beta\hbar\omega}\right) = 0 - \ln\left(1-e^{-\beta\hbar c}\right)$$

$$\bar{\varepsilon} = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln(Z) = \frac{\partial}{\partial\beta}\ln\left(1-e^{-\beta\hbar\omega}\right)$$

$$= \frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega}} \cdot (-\hbar\omega)\cdot\left(-e^{-\beta\hbar\omega}\right) = \frac{\hbar\omega \cdot e^{-\beta\hbar\omega}}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}$$

$$\Rightarrow \bar{\varepsilon} = \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1} = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}$$

Multipliziert man dies mit der Zustandsdichte, erhält man:

$$\frac{dE(\omega)}{d\omega} = g(\omega)\cdot\bar{\varepsilon}(\omega) = \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3}\cdot\frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}$$

$$\varrho(\omega,T) = \frac{dE(\omega)}{V\,d\omega} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}\cdot\frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}$$

Das ist die gesuchte Energiedichteverteilung

8

Photonenstatistik:

Photonen sind Bosonen. Es gilt die Bose-Einstein Statistik

$$f(E) = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon + \alpha} - 1} \qquad \alpha = \frac{\mu}{kT} = 0$$

Da die Photonenzahl beliebig ist.

$$\Rightarrow f_{phot}(E) = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} - 1} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} = f(\omega) \quad \text{mit } \varepsilon = \hbar\omega$$

Die Photonenzahldichte ergibt sich zu:

$$\frac{dN(\omega)}{d\omega} = g(\omega) \cdot f(\omega) = \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

Die Energieverteilung erhält man durch Multiplikation mit $\varepsilon = \hbar\omega$

$$\frac{dE}{d\omega} = \frac{dN(\omega)}{d\omega} \cdot \varepsilon(\omega) = \frac{dN(\omega)}{d\omega} \cdot \hbar\omega$$

$$= \frac{V\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

bzw.

$$\varrho(\omega, T) = \frac{dE}{V\,d\omega} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

Was wieder die bekannte Planck-Verteilung ist!

9

Stefan - Boltzmann Gesetz:

Dieses Gesetz gibt an, wieviel Leistung pro Fläche von einem schwarzen Strahler bei einer Temperatur T insgesamt abgestrahlt wird.

$$\bar{J} = \int_0^\infty J_{ges}(\nu, T)\, d\nu = \int_0^\infty 2\pi \frac{h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\, d\nu$$

Mit $x = \frac{h\nu}{kT}$ $\quad \nu = \frac{kT}{h} x \quad d\nu = \frac{kT}{h} dx$

$$\bar{J} = \int_0^\infty 2\pi \frac{h\left(\frac{kT}{h}\right)^3 x^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^x - 1} \cdot \left(\frac{kT}{h}\right) dx$$

$$= 2\pi \cdot \frac{(kT)^4}{h^3 c^2} \cdot \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\, dx$$

Mit $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\, dx = \frac{\pi^4}{15}$

$$\Rightarrow \quad \bar{J} = 2\pi \frac{(kT)^4}{h^3 c^2} \cdot \frac{\pi^4}{15} = \frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2} \cdot T^4$$

$$\bar{J} = \sigma \cdot T^4$$

Mit $\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2} = 5.67 \cdot 10^{-\infty} \frac{\mathrm{Watt}}{m^2 K^4}$

10