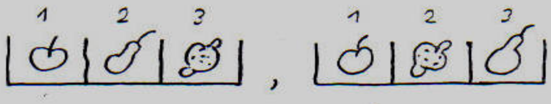
Wolfgang Renner
Gimbacher Weg 34
D-65779 Kelkheim
www.institut-wolfgang-renner.de
institut-wolfgang-renner@t-online.de
Telefon: 06195 4161

Kelkheim den 16. März 2015

Die Permutation

(c) W. Renner November 1995

Gegeben seien n unterscheidbare Objekte, deren Reihenfolge betrachtet werden soll. Diese Objekte seien zum Beispiel $n = 3$ Früchte:



Platz: 1 2 3 | 1 2 3
bzw. |A|B|C| |A|C|B|

Die Objektmenge $OM = \{$Apfel, Birne, Citrone$\}$ kann durch eine gleich-große Menge von Identifikationsnummern ersetzt werden: $M = \{1, 2, 3\}$.
Im allgemeinen ist die Zuordnung der Identifikationsnummern zu den Objekten beliebig. Bei dem Früchtebeispiel ist die alphabetische Reihenfolge jedoch eine naheliegende Naturordnung.

Da die n Objekte in unterschiedlicher Weise auf die n Plätze verteilt werden können, ergeben sich unterscheidbare Anordnungen, die man Permutationen nennt. Im allgemeinen läßt sich nur eine Änderung der Reihenfolge beschreiben. Eine natürliche Reihenfolge oder die aufsteigende Reihenfolge der beliebig vergebbaren Identifikationsnummern ergeben jedoch eine spezielle Normalordnung.
Man kann die Permutationsoperation mit einer zweireihigen Matrix beschreiben:

$$\begin{array}{l}
\text{Platznummer:} \\
\text{ursprüngliche Objektnummer} \Rightarrow \\
\text{Veränderte Objektnummer} \Rightarrow
\end{array}
\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad\ \ n \\ \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \dots & u_n \\ v_1 & v_2 & v_3 & \dots & v_n \end{pmatrix}\end{array} = \begin{array}{c} 2 \quad 1 \quad 3 \quad\ \ n \\ \begin{pmatrix} u_2 & u_1 & u_3 & \dots & u_n \\ v_2 & v_1 & v_3 & \dots & v_n \end{pmatrix}\end{array}$$

Vertauscht man die Spalten dieser Matrix, dann bleibt die Information über die Permutationsoperation unverändert. Sind die ursprünglichen Objektnummern $u_1, u_2, \dots, u_n$ in aufsteigender Folge geordnet, dann kann die erste Zeile wegfallen und die Permutation kann als einfaches geordnetes n-tupel geschrieben werden:

$$P_k^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ v_1 & v_2 & v_3 & \dots & v_n \end{pmatrix} = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$$

n = Elementzahl (Objekte bzw. Plätze)

k ist eine beliebig definierbare Identifikationsnummer für die unterschiedlichen möglichen Permutationsoperationen. Die Gesamtheit aller möglichen Permutationen P_k^n bilden die Menge P^n.

Beispiel: $P^2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \{(1,2),(2,1)\}$ Mit $P_1^2 = (1,2)$; $P_2^2 = (2,1)$

Die Anzahl der möglichen Permutationen von n Elementen $A\{P^n\}$ ergibt sich aus folgender Betrachtung: Auf dem ersten Platz können n Objekte stehen. Für den zweiten Platz gibt es noch $(n-1)$ Objekte, für den dritten Platz $(n-2)$ Objekte, bis zum n-ten Platz, auf dem das einzige verbleibende Objekt stehen muß. Daher ergibt sich die Anzahl zu:

$$A\{P^n\} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$$

Permutationen mit Wiederholung

Normalerweise sind die n Elemente v_i einer Permutation aus P_n unterscheidbar. Es ist aber auch möglich, daß diese Elemente nur $r < n$ unterscheidbare Eigenschaften E_j zeigen:

$$P^n_{n_1,n_2,\dots,n_r} = \{ (\underbrace{E_1(1), E_1(2), \dots, E_1(n_1)}_{n_1}, \underbrace{E_2(n+1), \dots, E_2(n_1+n_2)}_{n_2}, \dots, \underbrace{E_r(), \dots, E_r(n)}_{n_r}) \}$$

Elementzahl: n_1 n_2 n_r

Zur mathematischen Beschreibung teilen wir jedem Element $E_j(i)$ eine Identifikationsnummer $i = 1, 2, \dots, n$ zu. Diese unterscheidbar gemachten Elemente können $n!$ Permutationen bilden. Es gibt $n_j!$ Möglichkeiten die Elemente E_j untereinander zu vertauschen. Die sichtbare Gesamtanordnung ändert sich dadurch nicht. Für die Gesamtanzahl aller sichtbar unterschiedlichen Permutationen folgt daher:

$$A\{P^n_{n_1,n_2,\dots,n_r}\} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_r!} \qquad \text{Mit: } \sum_{j=1}^{r} n_j = n$$

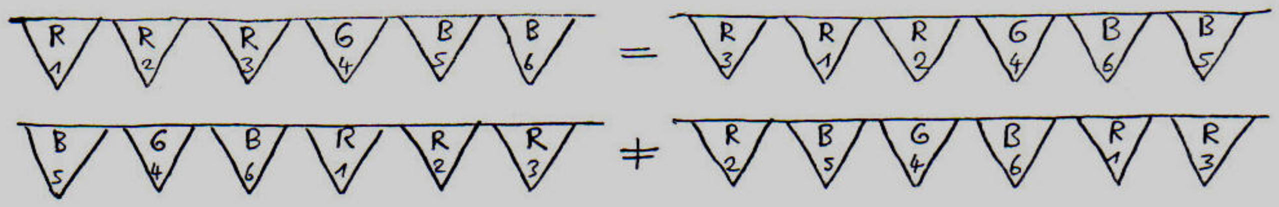
Als Beispiel betrachten wir 6 Fähnchen. Es gibt drei rote, eine grüne

— 2 —

und zwei blaue Fähnchen. Die Anzahl der unterscheidbaren Anordnungen lautet:

$$A\left\{P^{6}_{3,1,2}\right\} = \frac{6!}{3!\,1!\,2!} = 60 \qquad E_1 = \text{Rot},\ E_2 = \text{Grün},\ E_3 = \text{Blau}$$

$$n_1 = 3\ ,\ n_2 = 1\ ,\ n_3 = 2$$



Die Menge P^n bildet eine Gruppe

1.) Die Hintereinanderausführung von mehreren Permutationen $P_i^n, P_j^n \in P^n$ führt zu einer Gesamtpermutation P_k^n, welche wieder Element von P^n ist. Mit dieser Verknüpfung bildet die Menge der Permutationen P^n eine (nicht kommutative) Gruppe der Ordnung $n!$

$$P_k^n = P_i^n \otimes P_j^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 2 & .. & n \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & .. & u_n \\ v_{u_1} & v_{u_2} & .. & v_{u_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & .. & n \\ v_{u_1} & v_{u_2} & .. & v_{u_n} \end{pmatrix}$$

2.) Die Verknüpfung ist assoziativ:

$$P_i^n \otimes \left[P_j^n \otimes P_k^n\right] = \begin{pmatrix} 1 \ldots n \\ u_1 \ldots u_n \end{pmatrix} \otimes \left[\begin{pmatrix} 1 \ldots n \\ v_1 \ldots v_n \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \ldots n \\ w_1 \ldots w_n \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 \ldots n \\ u_1 \ldots u_n \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \ldots n \\ w_{v_1} \ldots w_{v_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \ldots n \\ w_{v_{u_1}} \ldots w_{v_{u_n}} \end{pmatrix}$$

$$\left[P_i^n \otimes P_j^n\right] \otimes P_k^n = \left[\begin{pmatrix} 1 \ldots n \\ u_1 \ldots u_n \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \ldots n \\ v_1 \ldots v_n \end{pmatrix}\right] \otimes \begin{pmatrix} 1 \ldots n \\ w_1 \ldots w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \ldots n \\ v_{u_1} \ldots v_{u_n} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \ldots n \\ w_1 \ldots w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \ldots n \\ w_{v_{u_1}} \ldots w_{v_{u_n}} \end{pmatrix}$$

3.) Es gibt ein neutrales (eins) Element P_1^n:

$$P_k^n \otimes P_1^n = \begin{pmatrix} 1 \ldots n \\ u_1 \ldots u_n \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \ldots n \\ u_1 \ldots u_n \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u_1 \ldots u_n \\ u_1 \ldots u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \ldots n \\ u_1 \ldots u_n \end{pmatrix} = P_k^n$$

$$P_1^n \otimes P_k^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \ldots n \\ u_1 \ldots u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \ldots n \\ u_1 \ldots u_n \end{pmatrix} = P_k^n$$

4.) Es gibt ein inverses Element $(P_k^n)^{-1}$:

$$P_k^n \otimes (P_k^n)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix} = P_1^n$$

$$\left(P_k^n\right)^{-1} \otimes P_k^n = \begin{pmatrix} v_1 \dots v_n \\ 1 \dots n \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \dots n \\ v_1 \dots v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \dots v_n \\ v_1 \dots v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2 \dots n \\ 1\,2 \dots n \end{pmatrix} = P_1^n$$

Die Gruppe der Permutationen P^n der Elemente $M = \{1, 2, \dots, n\}$ wird auch symmetrische Gruppe S_n genannt (Bronstein). Beispiel für $n = 3$:

$$P_1^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \; ; \quad P_2^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \; ; \quad P_3^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_4^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \; ; \quad P_5^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \; ; \quad P_6^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2^3 \otimes P_3^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = P_5^3$$

$$P_3^3 \otimes P_2^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = P_4^3$$

Wir erkennen $P_2^3 \otimes P_3^3 \neq P_3^3 \otimes P_2^3$, das heißt die Verknüpfung der Permutationsgruppe ist nicht kommutativ.

Die Inversion

Wenn die Reihenfolge der oberen und unteren Elemente eines Spaltenpaares in der Permutationsmatrix ungleich ist, dann nennt man ein solches Spaltenpaar eine Inversion:

$$P_k^n = \begin{pmatrix} \dots v_j \dots v_i \dots \\ \dots v_j \dots v_i \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots v_i \dots v_j \dots \\ \dots v_i \dots v_j \dots \end{pmatrix} = (\dots, v_i, \dots, v_j, \dots)$$

$$v_j > v_i \;\wedge\; v_j < v_i \qquad\qquad v_i < v_j \;\wedge\; v_i > v_j \qquad\qquad v_i > v_j$$

Durch den erlaubten Austausch der Spalten bleibt die Permutation und ihre Inversionen unverändert. Also können wir uns im Folgenden auf die normalgeordnete n-tupel Darstellung beschränken. Zunächst betrachten wir die Permutationsgruppe $P^2 = \{(1,2), (2,1)\}$

$P_1^2 = (1,2)$	null Inversionen	$I_0^2 = \{(1,2)\}$	$A\{I_0^2\} = 1$
$P_2^2 = (2,1)$	eine Inversion	$I_1^2 = \{(2,1)\}$	$A\{I_1^2\} = 1$

Bei der nächsten Permutationsgruppe $P^{n+1} = P^3 = \{(1,2,3), (2,1,3), \dots (3,2,1)\}$

kommt einfach ein weiteres Element hinzu. Wir betrachten das erste Element als abgesondert und erlauben den übrigen Elementen beliebige Permutationen. Zum Beispiel $(1;2,3)$ und $(1;3,2)$. Der Teil hinter dem Semikolon verhält sich also wie $P^n = P^2 = \{(2,3),(3,2)\}$.

Nun kann das zweite Element mit einer lokalen Vertauschung nach vorne gebracht werden: $(1,2,3) \Rightarrow (2;1,3)$. Zu dieser einfachen Inversion kommen die Inversionen hinter dem Semikolon dazu. Schließlich kann das letzte Element mit $n=2$ lokalen Vertauschungen nach vorne gebracht werden. Zu diesen beiden Inversionen kommen die Inversionen hinter dem Semikolon dazu.

Faßt man nun alle Permutationen mit k Inversionen zusammen, dann bekommt man die Menge I_k^{n+1} aller Permutationen mit $n+1$ Elementen und k Inversionen. $A\{I_k^{n+1}\}$ ist die Anzahl dieser Permutationen:

	0 Inv $(1;2,3)$	1 Inv $(2;1,3)$	2 Inv $(3;1,2)$
$I_0^3 =$	$\{(1;2,3)\}$		
$I_1^3 =$	$\{(1;\underbrace{3,2})\}$	$\cup\ \{(2;1,3)\}$	
$I_2^3 =$		$\{(2;\underbrace{3,1})\}$	$\cup\ \{(3;1,2)\}$
$I_3^3 =$			$\{(3;\underbrace{2,1})\}$

	0 Inv $(1;2,3)$	1 Inv $(2;1,3)$	2 Inv $(3;1,2)$	
$A\{I_0^3\} =$	$A\{I_0^2\}$			$= 1 = 1$
$A\{I_1^3\} =$	$A\{I_1^2\}$	$+ A\{I_0^2\}$		$= 1+1 = 2$
$A\{I_2^3\} =$		$A\{I_1^2\}$	$+ A\{I_1^2\}$	$= 1+1 = 2$
$A\{I_3^3\} =$			$A\{I_1^2\}$	$= 1 = 1$

Man kann alle Permutationen durch sukzessiven Austausch von benachbarten Elementen erzeugen. Die minimale Zahl der benötigten Vertauschungen entspricht gerade der Inversionszahl k.

Den Maximalwert von k nennen wir m_n. Er ergibt sich durch Auszählen der Inversionen bei vollständiger Reihenfolgeumkehr:

<u>Beispiel:</u> $n=4$ $\qquad I^4_{m_4} = \{(4,3,2,1)\}$ $\qquad m_n = 1+2+\ldots+(n-1) = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$

$m_4 = 1+2+3 = 6$ $\qquad m_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)\cdot n}{2}$

$n+1=4$ 0 Inv $(1;2,3,4)$ 1 Inv $(2;1,3,4)$ 2 Inv $(3;1,2,4)$ 3 Inv $(4;1,2,3)$ $m_n = \frac{3\cdot 2}{2} = 3$; $m_{n+1} = \frac{4\cdot 3}{2} = 6$

$$A\{I_0^4\} = A\{I_0^3\} = 1 = 1$$
$$A\{I_1^4\} = A\{I_1^3\} + A\{I_0^3\} = 2+1 = 3$$
$$A\{I_2^4\} = A\{I_2^3\} + A\{I_1^3\} + A\{I_2^3\} = 2+2+1 = 5$$
$$A\{I_3^4\} = A\{I_3^3\} + A\{I_2^3\} + A\{I_1^3\} + A\{I_0^3\} = 1+2+2+1 = 6$$
$$A\{I_4^4\} = A\{I_3^3\} + A\{I_2^3\} + A\{I_1^3\} = 1+2+2 = 5$$
$$A\{I_5^4\} = A\{I_3^3\} + A\{I_2^3\} = 1+2 = 3$$
$$A\{I_6^4\} = A\{I_3^3\} = 1 = 1$$

Wenn man die Additionsschemata für $n+1 = 3,4$ betrachtet, erkennt man ein allgemeines Bildungsgesetz der Inversionsklassen I_k^{n+1}:
Es werden alle Klassen I_i^n vereinigt mit $i = i_1, i_1-1, \dots, i_2$

$$i_1 = \begin{cases} 0,1,2,\dots,k & \text{für } k \le m_n \\ m_n & \text{für } k \ge m_n \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad i_2 = \begin{cases} 0 & \text{für } k \le n \\ k-n & \text{für } k > n \end{cases}$$

Damit kann eine allgemeine Rekursionsformel angegeben werden:

$$I_k^{n+1} = \bigcup_{i=i_1}^{i_2} I_i^n \quad \text{bzw.} \quad A\{I_k^{n+1}\} = \sum_{i=i_1=Min(k,m_n)}^{i_2=Max(0,k-n)} A\{I_i^n\}$$

Für $n=2,3$ erkennt man folgende Symmetrie der Anzahl:

$$A\{I^{n+1}_{m_{n+1}-k}\} = A\{I^{n+1}_{\tilde{k}}\} = A\{I^{n+1}_k\} \quad \text{bzw.} \quad A\{I^n_{m_n-i}\} = A\{I^n_{\tilde{i}}\} = A\{I^n_i\}$$

Mit der Rekursionsformel erhalten wir einen Induktionsschluß für alle n:

$$A\{I^{n+1}_{\underbrace{m_{n+1}-k}_{=\tilde{k}}}\} = \sum_{\tilde{i}=Min(\tilde{k},m_n)}^{Max(0,\tilde{k}-n)} A\{I^n_{\tilde{i}}\} \overset{?}{=} \sum_{i=Min(k,m_n)}^{Max(0,k-n)} A\{I^n_i\} = A\{I^{n+1}_k\}$$

Die allgemeine Gültigkeit dieser Beziehung erkennt man mit folgender Indextransformation ($\tilde{k} = m_{n+1} - k = [m_n + n - k]$):

$$\tilde{i} = m_n - i = Min(\tilde{k}, m_n) \quad \dots \quad Max(0, \tilde{k}-n)$$
$$i = m_n - \tilde{i} = m_n - Min([m_n+n-k], m_n) \quad \dots \quad m_n - Max(0, [m_n+n-k]-n)$$
$$= Max(0, k-n) \quad \dots \quad Min(m_n, k)$$

Wenn die Anzahl der Inversionen bei einer Permutation gerade ist, dann nennt man die Permutation gerade. Bei einer ungeraden Anzahl ist die Permutation ungerade. Beispiele für $n = 2, 3, 4$:

$I_g^2 = I_0^2 = \{(1,2)\}$, $I_u^2 = I_1^2 = \{(2,1)\}$ $A\{I_g^2\} = A\{I_u^2\} = 1$

$I_g^3 = I_0^3 \cup I_2^3 = \{(1,2,3)\} \cup \{(2,3,1),(3,1,2)\}$ $A\{I_g^3\} = 1+2 = 3$

$I_u^3 = I_1^3 \cup I_3^3 = \{(1,3,2),(2,1,3)\} \cup \{(3,2,1)\}$ $A\{I_u^3\} = 2+1 = 3$

$A\{I_g^4\} = A\{I_0^4\} + A\{I_2^4\} + A\{I_4^4\} + A\{I_6^4\} = 1+5+5+1 = 12$

$A\{I_u^4\} = A\{I_1^4\} + A\{I_3^4\} + A\{I_5^4\} = 3+6+3 = 12$

Wie man sieht, gibt es hierbei genauso viele gerade wie ungerade Permutationen, so daß gilt: $A\{I_g^n\} = A\{I_u^n\} = n!/2$.

Nun betrachten wir die Additionsschemata, mit denen man die $A\{I_k^{n+1}\}$ aus $A\{I_i^n\}$ rekursiv berechnen kann. Bei der Addition aller geraden $A\{I_k^{n+1}\}$ sehen wir, daß in der ersten Spalte alle geraden $A\{I_i^n\}$ addiert werden. Die zweite Spalte trägt die Summe aller ungeraden $A\{I_i^n\}$ bei. In der dritten Spalte kommen wieder alle geraden $A\{I_i^n\}$ dazu. Insgesamt gibt es $(n+1)$ Spalten, deren jeweilige Spaltensumme $n!/2$ addiert werden. Daher ergeben sich insgesamt $(n+1)\cdot\frac{n!}{2}$ gerade Permutationen.

Die Anzahl der ungeraden Permutationen läßt sich mit dem gleichen Induktionsschritt zeigen, so daß für alle n gilt, daß die Anzahl der geraden und ungeraden Permutationen gleich ist:

$$A\{I_g^{n+1}\} = A\{I_u^{n+1}\} = (n+1)\cdot A\{I_g^n\} = (n+1)\cdot A\{I_u^n\} = \frac{(n+1)!}{2}$$

Die Funktion $\chi(P_e^n) = \pm 1$ ist positiv 1 falls die Anzahl der Inversionen k der Permutation gerade ist. Für k ungerade

— 7 —

ist $\chi(P_\ell^n) = -1$. $\chi(P_\ell^n)$ heißt Charakter der Permutation.
Für die Verknüpfung von zwei Permutationen gilt:

$$\chi(P_\ell^n) = \chi(P_{\ell_1}^n \otimes P_{\ell_2}^n) = \chi(P_{\ell_1}^n) \cdot \chi(P_{\ell_2}^n) \qquad \text{Homomorphie !}$$

$$P_{\ell_1}^n \in I_{k_1}^n \,, \; P_{\ell_2}^n \in I_{k_2}^n \;\text{ und }\; P_\ell^n \in I_k^n \qquad k = k_1 + k_2 - 2\cdot x \geqslant 0$$

Die Permutation $P_{\ell_1}^n$ besteht aus k_1 Inversionen bzw. lokalen Vertauschungen. $P_{\ell_2}^n$ aus k_2 Inversionen. Bei der Verknüpfung von beiden Permutationen addieren sich die Vertauschungen. Im Fall sich zwei Vertauschungen gegenseitig aufheben, muß die Gesamtzahl der effektiven Vertauschungen jeweils um 2 erniedrigt werden. Das heißt, eine gerade Summe $k_1 + k_2$ führt auf jeden Fall auf eine gerade Inversionszahl k.

$g + g \Rightarrow g$	$(+1)\cdot(+1) \Rightarrow +1$	Das gleiche gilt für eine
$g + u \Rightarrow u$	$(+1)\cdot(-1) \Rightarrow -1$	ungerade Summe. Mit dem
$u + g \Rightarrow u$	$(-1)\cdot(+1) \Rightarrow -1$	nebenstehenden Schema folgt daraus
$u + u \Rightarrow g$	$(-1)\cdot(-1) \Rightarrow +1$	die oben behauptete Homomorphie.

Zyklen

Gegeben sei eine beliebige Permutation in n-tupel Normalform. Diese wird zur normalgeordneten Matrixform erweitert. Nun kann man die Matrixspalten so umordnen, daß auf jedes untere Element ein gleiches oberes Element folgt. Man entdeckt, daß in diesen Elementfolgen irgendwann ein unteres Element gleich dem oberen Startelement wird, und dadurch die Folge abbricht. Man erhält also einen geschlossenen Zyklus. Danach muß man einen neuen Zyklus anfangen. Beispiel:

$$(3,2,5,6,1,4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c|cc} 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{array}\right) = [1,3,5]\cdot[2]\cdot[4,6]$$

Aus der Zyklus-Darstellung läßt sich die Permutation eindeutig rekonstruieren.

Man kann die Zyklen in beliebiger Reihenfolge verknüpfen. Außerdem kann die Zahlenfolge innerhalb jedes Zykluses beliebig rotiert werden. Die sich ergebenden Unterschiede in der Permutationsmatrix gehen beim normalordnen verloren und führen daher immer auf die gleiche eindeutig bestimmte Permutation:

$$[2]\cdot[4,6]\cdot[1,3,5] = \left(\begin{array}{c|cc|ccc} 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (3,2,5,6,1,4)$$

$$[3,5,1]\cdot[6,4]\cdot[2] = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 3 & 5 & 1 & 6 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 6 & 2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (3,2,5,6,1,4)$$

Die Zyklenzerlegung der Permutationsgruppe P^1 und P^2 lauten:

$$P_1^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = [1] \qquad P_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = [1]\cdot[2] \qquad P_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = [1,2]$$

$$Z_1^1 = \{(1)\} \quad A\{Z_1^1\} = 1 \qquad Z_1^2 = \{(1,2)\} \quad A\{Z_1^2\} = 1 \qquad Z_2^2 = \{(2,1)\} \quad A\{Z_2^2\} = 1$$

Mit Z_k^n bezeichnen wir die Menge aller Permutationen mit n Elementen und k Zyklen. $A\{Z_k^n\}$ ist die Anzahl der Permutationen in dieser Menge. Die Zyklenzahl k kann von 1 bis n gehen. Für die Permutationsgruppe P^3 erhalten wir:

$$P_1^3 = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right) = [1]\cdot[2]\cdot[3] \qquad P_2^3 = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right) = [1,2]\cdot[3] \qquad P_3^3 = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{array}\right) = [1]\cdot[2,3]$$

$$P_4^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = [1,2,3] \qquad P_5^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = [1,3,2] \qquad P_6^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right) = [1,3]\cdot[2]$$

Die Permutationsgruppe P^3 enthält also folgende Zyklusklassen:

$$Z_1^3 = \{ [1,2;3], [1;3;2] \} = \{ (2,3,1), (3,1,2) \} \qquad A\{Z_1^3\} = 2$$

$$Z_2^3 = \left\{ \begin{array}{l} [1,2] * [3] \\ [1]\cdot[2;3], [1;3]\cdot[2] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} (2,1,3) \\ (1,3,2), (3,2,1) \end{array} \right\} \qquad A\{Z_2^3\} = 3$$

$$Z_3^3 = \{ [1]\cdot[2]\cdot[3] \} = \{ (1,2,3) \} \qquad A\{Z_3^3\} = 1$$

– 9 –

Bei der nächsten Permutationsgruppe P^4 kommt die 4 als neues Element hinzu. Bei der Menge Z_1^4 kann die 4 an drei unterschiedlichen Stellen in einen Zyklus der Menge Z_1^3 eingefügt werden. Z_4^4 kann nur aus vier Einzelzyklen bestehen. Die Menge Z_2^4 entsteht durch Anfügen eines Einzelzyklus [4] an die Zyklen der Menge Z_1^3 und durch Einfügen der ;4; in die Zyklen der Menge Z_2^3. In der gleichen Weise entsteht die Menge Z_3^4 aus Z_2^3 und Z_3^3. Insgesamt ergibt sich für Z_k^4 :

$$Z_1^4 = \left\{ \begin{array}{l} [1,2,3;4],\ [1,2;4;3],\ [1;4;2,3] \\ [1,3,2;4],\ [1,3;4;2],\ [1;4;3,2] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} (2,3,4,1),\ (2,4,1,3),\ (4,3,1,2) \\ (3,4,2,1),\ (3,1,4,2),\ (4,1,2,3) \end{array} \right\}$$

$$Z_2^4 = \left\{ \begin{array}{l} [1,2,3]*[4],\ [1,3,2]*[4] \\ [1,2]\cdot[3;4],\ [1,2;4]\cdot[3],\ [1;4;2]\cdot[3] \\ [1]\cdot[2,3;4],\ [1]\cdot[2;4;3],\ [1;4]\cdot[2,3] \\ [1,3]\cdot[2;4],\ [1,3;4]\cdot[2],\ [1;4;3]\cdot[2] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} (2,3,1,4),\ (3,1,2,4) \\ (2,1,4,3),\ (2,4,3,1),\ (4,1,3,2) \\ (1,3,4,2),\ (1,4,2,3),\ (4,3,2,1) \\ (3,4,1,2),\ (3,2,4,1),\ (4,2,1,3) \end{array} \right\}$$

$$Z_3^4 = \left\{ \begin{array}{l} [1,2]\cdot[3]*[4],\ [1]\cdot[2,3]*[4],\ [1,3]\cdot[2]*[4] \\ [1]\cdot[2]\cdot[3;4],\ [1]\cdot[2;4]\cdot[3],\ [1;4]\cdot[2]\cdot[3] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} (2,1,3,4),(1,3,2,4),(3,2,1,4) \\ (1,3,2,4),\ (3,2,1,4),\ (2,1,3,4) \end{array} \right\}$$

$$Z_4^4 = \{ [1]\cdot[2]\cdot[3] * [4] \} = \{ (1,2,3,4) \}$$

Die Anzahl $A\{Z_k^4\}$ in den Zyklenklassen ergibt sich direkt gemäß der Konstruktion aus der Anzahl $A\{Z_{k-1}^3\}$ vom Anfügen plus der Anzahl $A\{Z_k^3\}$ mal den $n=3$ Einfügepositionen vom Einfügen:

$$A\{Z_1^4\} = \qquad 3\cdot A\{Z_1^3\} = 3\cdot 2 = 6$$

$$A\{Z_2^4\} = A\{Z_1^3\} + 3\cdot A\{Z_2^3\} = 2 + 3\cdot 3 = 11$$

$$A\{Z_3^4\} = A\{Z_2^3\} + 3\cdot A\{Z_3^3\} = 3 + 3\cdot 1 = 6$$

$$A\{Z_4^4\} = A\{Z_3^3\} \qquad = 1 \qquad = 1$$

— 10 —

Die rekursive Bildungskonstruktion der Z_k^{n+1} aus Z_{k-1}^n zum Anfügen und Z_k^n mal n Einfügepositionen, kann für beliebige n benutzt werden, so daß allgemein gilt:

$$\left.\begin{array}{llcl} & \underline{\text{Anfügen}} & & \underline{\text{Einfügen}} \\ A\{Z_1^{n+1}\} = & & & n\cdot A\{Z_1^n\} \\ A\{Z_2^{n+1}\} = & A\{Z_1^n\} & + & n\cdot A\{Z_2^n\} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A\{Z_k^{n+1}\} = & A\{Z_{k-1}^n\} & + & n\cdot A\{Z_k^n\} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A\{Z_n^{n+1}\} = & A\{Z_{n-1}^n\} & + & n\cdot A\{Z_n^n\} \\ A\{Z_{n+1}^{n+1}\} = & A\{Z_n^n\} & = & 1 \end{array}\right\}$$

$(n+1)$ Zyklenklassen Z_k^{n+1} werden aus n Zyklenklassen Z_ℓ^n gebildet.

Die Gesamtzahl der Permutationen ergibt sich aus der Summe der einzelnen Zyklenklassen in ordnungsgemäßer Weise zu:

$$\sum_{k=1}^{n+1} A\{Z_k^{n+1}\} = (n+1)\cdot\sum_{\ell=1}^{n} A\{Z_\ell^n\} = (n+1)\cdot n! = (n+1)!$$

Die Zyklenklassen Z_K^n können noch weiter zerlegt werden, wenn man die Längen ℓ_j der auftretenden Zyklen beachtet. r_ℓ ist dabei die Anzahl der Zyklen mit der Länge ℓ. Es muß gelten:

Anzahl der Elemente: $\sum_{\ell=1}^{n} r_\ell\cdot\ell = n \qquad (\ell = 1, 2, \ldots, n)$

Anzahl der Zyklen: $\sum_{\ell=1}^{n} r_\ell = k \qquad (r_\ell = 0, 1, 2, \ldots, k)$

Die neuen Unterklassen werden mit folgender Notation beschrieben:

$$Z_K^n(\underset{\substack{\uparrow\\ \ell=1}}{r_1}, \underset{\substack{\uparrow\\ \ell=2}}{r_2}, \ldots, \underset{\substack{\uparrow\\ \ell=n}}{r_n}) = \underbrace{[v_1, v_2, \ldots, v_{\ell_1}]}_{\ell_1}\cdot\underbrace{[v_{\ell_1+1}, \ldots, v_{\ell_1+\ell_2}]}_{\ell_2}\cdots\underbrace{[\ldots, v_{n-1}, v_n]}_{\ell_K}$$

zu: $\ell=1$, $\ell=2$, $\ell=n$; ℓ_1, ℓ_2 Elemente

Es gibt n Elemente v_i und k Zyklen der Länge ℓ_j. Die n Elemente

— 11 —

können beliebig ausgetauscht werden. Es gibt demnach $n!$ verschiedene Stellungen der V_i. Weil die Reihenfolge der Zyklen egal ist, muß bei gleichlangen Zyklen $(r_\ell > 1)$ deren Stellungsvariabilität mit einem Faktor $r_\ell!$ berücksichtigt werden. Innerhalb jedes Zykluses gibt es ℓ_j verschiedene Rotationsstellungen, welche jedoch alle die gleiche Permutation beschreiben. Daher erhalten wir als Anzahl:

$$A\{Z_k^n(r_1, r_2, \dots, r_n)\} = \frac{1}{r_1!\, r_2! \cdots r_n!} \cdot \frac{n!}{1^{r_1} \cdot 2^{r_2} \cdots n^{r_n}} = \frac{n!}{\prod_{\ell=1}^{n} (r_\ell! \cdot \ell^{r_\ell})}$$

Die gesamte Klasse Z_k^n bekommen wir, in dem alle Möglichkeiten die Summe $\sum r_\ell \cdot \ell = n$ zu bilden durchlaufen werden. Für $n=5$ und $k=3$ gibt es beispielsweise zwei Möglichkeiten: $2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 5$ gibt $Z_3^5(2,0,1,0,0)$ und $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 5$ gibt $Z_3^5(1,2,0,0,0)$.

Insgesamt ergibt sich für die Permutationsgruppe P^5 folgende Zerlegungen:

$$A\{Z_1^5\} = A\{Z_1^5(0,0,0,0,1)\} = \frac{1}{0!0!0!0!1!} \cdot \frac{5!}{1^0 2^0 3^0 4^0 5^1} = \frac{120}{5} = 24$$

$$A\{Z_2^5\} = A\{Z_2^5(1,0,0,1,0) \cup Z_2^5(0,1,1,0,0)\} = \frac{1}{1!1!} \cdot \frac{5!}{1^1 4^1} + \frac{1}{1!1!} \cdot \frac{5!}{2^1 3^1} = 30 + 20 = 50$$

$$A\{Z_3^5\} = A\{Z_3^5(2,0,1,0,0) \cup Z_3^5(1,2,0,0,0)\} = \frac{1}{2!1!} \cdot \frac{5!}{1^2 \cdot 3^1} + \frac{1}{1!2!} \cdot \frac{5!}{1^1 2^2} = 20 + 15 = 35$$

$$A\{Z_4^5\} = A\{Z_4^5(3,1,0,0,0)\} = \frac{1}{3!1!0!0!0!} \cdot \frac{5!}{1^3 2^1 3^0 4^0 5^0} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10$$

$$A\{Z_5^5\} = A\{Z_5^5(5,0,0,0,0)\} = \frac{1}{5!0!0!0!0!} \cdot \frac{5!}{1^5 2^0 3^0 4^0 5^0} = \frac{120}{120} = 1$$

Die bekannten Rekursionsbeziehungen liefern das gleiche Resultat:

$$\begin{aligned}
A\{Z_1^5\} &= & 4 \cdot A\{Z_1^4\} &= 4 \cdot 6 &= 24 \\
A\{Z_2^5\} &= A\{Z_1^4\} &+ 4 \cdot A\{Z_2^4\} &= 6 + 4 \cdot 11 &= 50 \\
A\{Z_3^5\} &= A\{Z_2^4\} &+ 4 \cdot A\{Z_3^4\} &= 11 + 4 \cdot 6 &= 35 \\
A\{Z_4^5\} &= A\{Z_3^4\} &+ 4 \cdot A\{Z_4^4\} &= 6 + 4 \cdot 1 &= 10 \\
A\{Z_5^5\} &= A\{Z_4^4\} & &= 1 &= 1
\end{aligned}$$

-12-

Fixpunkte

Steht bei einer Permutation in n-tupel Darstellung das Element i an der i-ten Stelle, dann ergibt sich in Matrix Darstellung eine Spalte mit dem Wert i oben und unten. Die Permutation bewirkt an dieser Stelle keine Vertauschung. Daher spricht man von einem Fixpunkt. In der Zyklen Darstellung bilden alle Fixpunkte Einzelzyklen. Wir betrachten ein Beispiel:

$$(7,2,6,4,3,5,1,8) = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 7\,2\,6\,4\,3\,5\,1\,8 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 2 & 4 & 8 & 1\,7 & 3\,6\,5 \\ 2 & 4 & 8 & 7\,1 & 6\,5\,3 \end{array}\right) = \begin{cases} [2]\cdot[4]\cdot[8]\cdot[1,7]\cdot[3,6,5] \\ [2]\cdot[4]\cdot[8]\cdot\langle 1,7,3,6,5\rangle \end{cases}$$

Es gibt drei Fixpunkte und zwei Zyklen mit mehreren Elementen. Man kann nun die gesamte Permutationsgruppe P^n in Unterklassen F_k^n zerlegen, so daß in den einzelnen Klassen jeweils alle Permutationen mit k Fixpunkten zusammengefaßt werden. Die Fixpunktzahl k läuft von Null bis n. Die Menge F_{n-1}^n ist leer, da bei $n-1$ Fixpunkten als Rest ein Einzelzyklus bleibt, der ebenso Fixpunkt ist und eine solche Permutation zu F_n^n gehört.

Die Permutationsgruppen bis P^3 zerfallen in folgende Fixpunktklassen:

Festlegung: $A\{F_0^0\} = 1$ $\qquad$ $F_0^2 = \{[1,2]\} = \{(2,1)\}$ $\qquad$ $A\{F_0^2\} = 1$

$F_0^1 = \{\}$ $\qquad$ $A\{F_0^1\} = 0$ $\qquad$ $F_1^2 = \{\}$ $\qquad$ $A\{F_1^2\} = 0$

$F_1^1 = \{[1]\} = \{(1)\}$ $\qquad$ $A\{F_1^1\} = 1$ $\qquad$ $F_2^2 = \{[1]\cdot[2]\} = \{(1,2)\}$ $\qquad$ $A\{F_2^2\} = 1$

$$F_0^3 = \{[1,2;3], [1;3;2]\} = \{(2,3,1), (3,2,1)\} \qquad A\{F_0^3\} = 2$$

$$F_1^3 = \left\{\begin{matrix} [1,2]*[3] \\ [1]\cdot[2!3], [1!3]\cdot[2] \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} (2,1,3) \\ (1,3,2), (3,2,1) \end{matrix}\right\} \qquad A\{F_1^3\} = 3$$

$$F_2^3 = \{\} \qquad A\{F_2^3\} = 0 \qquad F_3^3 = \{[1]\cdot[2]*[3]\} = \{(1,2,3)\} \qquad A\{F_3^3\} = 1$$

Die Fixpunktklassen F_k^4 lassen sich rekursiv aus den Fixpunktklassen F_j^3 konstruieren: Für F_0^4 können wir das neue Element ;4; an drei

— 13 —

Positionen in die Zyklen von F_0^3 einfügen. Wird die !4 in einen Einzelzyklus von F_1^3 eingefügt, dann wird dieser Fixpunkt zerstört, so daß das Resultat nun zu F_0^4 gezählt werden muß. Für F_1^4 kann die *[4] als Einzelzyklus an die Permutationen von F_0^3 angefügt werden. Zusätzlich kann man die ;4 an zwei Positionen in die Zweielementzyklen von F_1^3 einfügen. F_2^4 entsteht durch Einzelzyklusanfügung an F_1^3 und Fixpunktzerstörung von F_3^3. F_3^4 ist leer und F_4^4 entsteht aus F_3^3 :

$$F_0^4 = \left\{\begin{matrix} [1,2,3;4], [1,2;4,3], [1;4,2,3] \\ [1,3,2;4], [1,3;4,2], [1;4,3,2] \\ [1,2]\cdot[3!4], [1!4]\cdot[2,3], [1,3]\cdot[2!4] \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} (2,3,4,1), (2,4,1,3), (4,3,1,2) \\ (3,4,2,1), (3,1,4,2), (4,1,2,3) \\ (2,1,4,3), (4,3,2,1), (3,4,1,2) \end{matrix}\right\}$$

$$F_1^4 = \left\{\begin{matrix} [1,2,3]*[4], [1,3,2]*[4] \\ [1,2;4]\cdot[3], [1;4,2]\cdot[3] \\ [1]\cdot[2,3;4], [1]\cdot[2;4,3] \\ [1,3;4]\cdot[2], [1;4,3]\cdot[2] \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} (2,3,1,4), (3,1,2,4) \\ (2,4,3,1), (4,1,3,2) \\ (1,3,4,2), (1,4,2,3) \\ (3,2,4,1), (4,2,1,3) \end{matrix}\right\}$$

$$F_2^4 = \left\{\begin{matrix} [1,2]\cdot[3]*[4], [1]\cdot[2,3]*[4], [1,3]\cdot[2]*[4] \\ [1]\cdot[2]\cdot[3!4], [1]\cdot[2!4]\cdot[3], [1!4]\cdot[2]\cdot[3] \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} (2,1,3,4), (1,3,2,4), (3,2,1,4) \\ (1,2,4,3), (1,4,3,2), (4,2,3,1) \end{matrix}\right\}$$

$$F_3^4 = \{\} \qquad F_4^4 = \{[1]\cdot[2]\cdot[3]*[4]\} = \{(1,2,3,4)\}$$

Die Anzahlen $A\{F_k^4\}$ ergeben sich unmittelbar aus der Konstruktion:

$$A\{F_0^4\} = 3\cdot A\{F_0^3\} + 1\cdot A\{F_1^3\} = 3\cdot 2 + 1\cdot 3 = 9$$

$$A\{F_1^4\} = A\{F_0^3\} + 2\cdot A\{F_1^3\} + 2\cdot A\{F_2^3\} = 2 + 2\cdot 3 + 2\cdot 0 = 8$$

$$A\{F_2^4\} = A\{F_1^3\} + 1\cdot A\{F_2^3\} + 3\cdot A\{F_3^3\} = 3 + 1\cdot 0 + 3\cdot 1 = 6$$

$$A\{F_3^4\} = A\{F_2^3\} + 0\cdot A\{F_3^3\} = 0 + 0\cdot 1 = 0$$

$$A\{F_4^4\} = A\{F_3^3\} = 1 = 1$$

— 14 —

Dieses Rekursionsschema läßt sich für beliebiges n auf die Konstruktion von F_k^{n+1} aus F_j^n verallgemeinern:

$$
\begin{array}{llll}
 & \underline{\text{Anfügen}} & \underline{\text{Einfügen}} & \underline{\text{Zerstören}} \\
A\{F_0^{n+1}\} = & & n \cdot A\{F_0^n\} & + 1 \cdot A\{F_1^n\} \\
A\{F_1^{n+1}\} = & A\{F_0^n\} & + (n-1) \cdot A\{F_1^n\} & + 2 \cdot A\{F_2^n\} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
A\{F_k^{n+1}\} = & A\{F_{k-1}^n\} & + (n-k) \cdot A\{F_k^n\} & + (k+1) \cdot A\{F_{k+1}^n\} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
A\{F_{n-2}^{n+1}\} = & A\{F_{n-3}^n\} & + 2 \cdot A\{F_{n-2}^n\} & + (n-1) \cdot A\{\,\} \\
A\{F_{n-1}^{n+1}\} = & A\{F_{n-2}^n\} & + 1 \cdot A\{\,\} & + n \cdot A\{F_n^n\} \\
A\{F_{n+1}^{n+1}\} = & A\{F_n^n\} & &
\end{array}
$$

Die Zyklenzerlegung der Elemente von F_j^n besteht aus j Fixpunktzyklen und einer beliebigen Kombination von Zyklen mit zwei oder mehreren Elementen:

j Fixpunktzyklen $\qquad$ $n-j$ Elemente in anderen Zyklen

$$F_j^n = \{ [v_1]\cdot[v_2]\cdots[v_j]\cdot\langle v_{j+1}, v_{j+2}, \ldots, v_{n-1}, v_n \rangle \}$$

Für $(n+1)$: j Positionen zum Zerstören $\qquad$ $(n-j)$ Einfügepositionen $\qquad$ $1 *$ Anfügen

Im ersten Fixpunktzyklus können n Werte stehen, im zweiten $(n-1)$ Werte und schließlich im letzten $(n-j+1)$ Werte. Das Produkt dieser Möglichkeiten geteilt durch $j!$ (Vertauschbarkeit von Zyklen) ergibt die Gesamtzahl der Kombinationen im Fixpunktteil. Der Zyklusrest besteht aus $(n-j)$ Elementen und hat keine Fixpunkte. Seine Anzahl ist daher gleich $A\{F_0^{n-j}\}$:

$$A\{F_j^n\} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-j+1)}{j!} \cdot A\{F_0^{n-j}\} = \binom{n}{j} \cdot A\{F_0^{n-j}\}$$

In der oben hergeleiteten Rekursionsformel wird $A\{F_k^{n+1}\}$ aus $A\{F_j^n\}$ konstruiert. Da die $A\{F_j^n\}$ auf die $A\{F_0^{n-j}\}$ zurück geführt werden können, läßt sich $A\{F_k^{n+1}\}$ auch aus $A\{F_0^{n-j}\}$ konstruieren:

— 15 —

$$A\{F_k^{n+1}\} = \binom{n}{k-1} \cdot A\{F_0^{n-k+1}\} + (n-k)\cdot\binom{n}{k}\cdot A\{F_0^{n-k}\} + (k+1)\cdot\binom{n}{k+1}\cdot A\{F_0^{n-k-1}\}$$

Für $A\{F_0^{n+1}\}$ ergibt sich speziell folgende Rekursionsbeziehung:

$$A\{F_0^{n+1}\} = n\cdot A\{F_0^{n}\} + 1\cdot\binom{n}{1}\cdot A\{F_0^{n-1}\} = n\cdot\left[A\{F_0^{n}\} + A\{F_0^{n-1}\}\right]$$

Wenn man diese Rekursionsformel für $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$ auswertet entdeckt man eine weitere eigentümliche Rekursionsbeziehung:

$$A\{F_0^0\} = 1\ ;\ A\{F_0^1\} = 0\ ;\ A\{F_0^2\} = 1\cdot[0+1] = 2\cdot 0 + 1 = 1$$

$$A\{F_0^3\} = 2\cdot[1+0] = 2\cdot 1 + 0 = 2\cdot 1 + 1 - 1 = 3\cdot 1 - 1 = 2$$
$$A\{F_0^4\} = 3\cdot[2+1] = 3\cdot 2 + 3 = 3\cdot 2 + 2 + 1 = 4\cdot 2 + 1 = 9$$
$$A\{F_0^5\} = 4\cdot[9+2] = 4\cdot 9 + 8 = 4\cdot 9 + 9 - 1 = 5\cdot 9 - 1 = 44$$

Man vermutet nun folgende allgemein gültige Rekursionsformel:

$$A\{F_0^n\} = (n-1)\cdot\left[A\{F_0^{n-1}\} + A\{F_0^{n-2}\}\right] = n\cdot A\{F_0^{n-1}\} + (-1)^n$$

$$A\{F_0^{n+1}\} = n\cdot\left[A\{F_0^n\} + A\{F_0^{n-1}\}\right] = (n+1)\cdot A\{F_0^n\} - (-1)^n$$

Verknüpft man diese neue Rekursionsformel für $A\{F_0^{n+1}\}$ und $A\{F_0^n\}$ dann wird man auf die Ausgangsgleichung in bestätigender Weise zurückgeführt:

$$\begin{aligned} A\{F_0^{n+1}\} &= (n+1)\cdot A\{F_0^n\} - (-1)^n = n\cdot A\{F_0^n\} + A\{F_0^n\} - (-1)^n \\ &= n\cdot A\{F_0^n\} + \left[n\cdot A\{F_0^{n-1}\} + (-1)^n\right] - (-1)^n \\ &= n\cdot\left[A\{F_0^n\} + A\{F_0^{n-1}\}\right] \end{aligned}$$

Mit $F(P^n)$ bezeichnen wir die Anzahl aller Permutationen mit n Elementen und mindestens einem Fixpunkt. Das ist offensichtlich die Gesamtzahl der möglichen Permutationen minus der Anzahl der Permutationen ohne Fixpunkt. Mit $G(P^n)$ bezeichnen wir die Anzahl aller Permutationen mit genau einem Fixpunkt. $F(P^n)$ und $G(P^n)$ zeigen einige interessante Eigenschaften, die im folgenden skizziert werden:

$$F(P^n) = A\{P^n\} - A\{F_0^n\} = n! - A\{F_0^n\} = n! - \left[n \cdot A\{F_0^{n-1}\} + (-1)^n\right]$$

$$= n \cdot \left[(n-1)! - A\{F_0^{n-1}\}\right] - (-1)^n = n \cdot F(P^{n-1}) - (-1)^n$$

$$F(P^{n+1}) = A\{P^{n+1}\} - A\{F_0^{n+1}\} = (n+1) \cdot F(P^n) + (-1)^n$$

$$F(P^1) = 1 \qquad = 1! \cdot \tfrac{1}{1} \qquad = 1$$

$$F(P^2) = 2 \cdot 1 - 1 \qquad = 2! \cdot \left(\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{1 \cdot 2}\right) \qquad = 1$$

$$F(P^3) = 3 \cdot [2 \cdot 1 - 1] + 1 \qquad = 3! \cdot \left(\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{1 \cdot 2} + \tfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right) \qquad = 4$$

$$F(P^4) = 4 \cdot [3 \cdot (2 \cdot 1 - 1) + 1] - 1 \qquad = 4! \cdot \left(\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{1 \cdot 2} + \tfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \tfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\right) = 15$$

$$F(P^5) = 5 \cdot [4 \cdot (3 \cdot (2 \cdot 1 - 1) + 1) - 1] + 1 \quad = 5! \cdot \left(\tfrac{1}{1!} - \tfrac{1}{2!} + \tfrac{1}{3!} - \tfrac{1}{4!} + \tfrac{1}{5!}\right) = 76$$

$$F(P^n) = n! \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \cdot (n-k)! = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \binom{n}{k} \cdot (n-k)!$$

$$F(P^{n+1}) = (n+1) \cdot n! \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} + (n+1)! \frac{(-1)^n}{(n+1)!} = (n+1) \cdot F(P^n) + (-1)^n$$

$$G(P^n) = A\{F_1^n\} = n \cdot A\{F_0^{n-1}\}$$

$$G(P^{n+1}) = (n+1) \cdot A\{F_0^n\} = (n+1) \cdot \left[n \cdot A\{F_0^{n-1}\} + (-1)^n\right] = (n+1) \cdot \left[G(P^n) + (-1)^n\right]$$

$$G(P^1) = 1 \qquad = 1!\ \tfrac{1}{1} \qquad = 1$$

$$G(P^2) = 2 \cdot [1 - 1] \qquad = 2! \cdot \left(\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{1}\right) \qquad = 0$$

$$G(P^3) = 3 \cdot [2 \cdot (1-1) + 1] \qquad = 3! \cdot \left(\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{1 \cdot 2}\right) \qquad = 3$$

$$G(P^4) = 4 \cdot [3 \cdot (2 \cdot (1-1) + 1) - 1] \qquad = 4!\left(\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{1 \cdot 2} - \tfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right) \qquad = 8$$

$$G(P^5) = 5 \cdot [4 \cdot (3 \cdot (2 \cdot (1-1) + 1) - 1) + 1] \quad = 5!\left(\tfrac{1}{0!} - \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} - \tfrac{1}{3!} + \tfrac{1}{4!}\right) = 45$$

$$G(P^n) = n! \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{n!}{(n-k)!\,k!}\, k \cdot (n-k)! = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \cdot k \cdot (n-k)!$$

$$G(P^{n+1}) = (n+1) \cdot n! \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} + (n+1)! \frac{(-1)^n}{n!} = (n+1) \cdot \left[G(P^n) + (-1)^n\right]$$

– 17 –

Aus den verfeinerten Zyklenklassen $Z_k^n(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ lassen sich die Fixpunktklassen F_j^n konstruieren. Ein Fixpunkt ist ein Zyklus der Länge 1. Das heißt die Anzahl r_1 ist j. Daher folgt:

$$F_j^n = \cup \; Z_k^n(j, r_2, r_3, \ldots, r_n)$$

für alle möglichen Kombinationen von $k, r_2, r_3, \ldots, r_n$

$$A\{F_j^n\} = \sum A\{Z_k^n(j, r_2, r_3, \ldots, r_n)\}$$

Für die Permutationsgruppe P^5 erhalten wir damit:

$$A\{F_0^5\} = A\{Z_1^5(0,0,0,0,1) \cup Z_2^5(0,1,1,0,0)\} = \frac{1}{1!} \cdot \frac{5!}{5^1} + \frac{1}{1!1!} \cdot \frac{5!}{2^1 3^1} = 24 + 20 = 44$$

$$A\{F_1^5\} = A\{Z_2^5(1,0,0,1,0) \cup Z_3^5(1,2,0,0,0)\} = \frac{1}{1!1!} \frac{5!}{1^1 4^1} + \frac{1}{1!2!} \cdot \frac{5!}{1^1 2^2} = 30 + 15 = 45$$

$$A\{F_2^5\} = A\{Z_3^5(2,0,1,0,0)\} = \frac{1}{2!0!1!0!0!} \cdot \frac{5!}{1^2 2^0 3^1 4^0 5^0} = \frac{120}{2 \cdot 3} = 20$$

$$A\{F_3^5\} = A\{Z_4^5(3,1,0,0,0)\} = \frac{1}{3!1!0!0!0!} \cdot \frac{5!}{1^3 2^1 \cdot 3^0 4^0 5^0} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10$$

$$A\{F_5^5\} = A\{Z_5^5(5,0,0,0,0)\} = \frac{1}{5!0!0!0!0!} \cdot \frac{5!}{1^5 2^0 3^0 4^0 5^0} = \frac{120}{120} = 1$$

Die ursprünglichen Rekursionsbeziehungen liefern das gleiche Resultat:

$$A\{F_0^5\} = 4 \cdot A\{F_0^4\} + 1 \cdot A\{F_1^4\} = 4 \cdot 9 + 1 \cdot 8 = 44$$
$$A\{F_1^5\} = A\{F_0^4\} + 3 \cdot A\{F_1^4\} + 2 \cdot A\{F_2^4\} = 9 + 3 \cdot 8 + 2 \cdot 6 = 45$$
$$A\{F_2^5\} = A\{F_1^4\} + 2 \cdot A\{F_2^4\} + 3 \cdot A\{F_3^4\} = 8 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 0 = 20$$
$$A\{F_3^5\} = A\{F_2^4\} + 1 \cdot A\{F_3^4\} + 4 \cdot A\{F_4^4\} = 6 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 10$$
$$A\{F_4^5\} = A\{F_3^4\} + 0 \cdot A\{F_4^4\} = 0 + 0 \cdot 1 = 0$$
$$A\{F_5^5\} = A\{F_4^4\} = 1 = 1$$

– 18 –