

Wolfgang Renner
Gimbacherweg 34
65779 Kelkheim

Privatlehrer

Tel. 06195/4161

Zinsrechnung und Abschreibung Juli 1995

Geldsparen mit Zinsen

Wird zum Zeitpunkt $t=0$ ein Kapitalbetrag K_0 bei einem Kreditinstitut eingezahlt, dann wird dem Anleger nach einer Zeiteinheit $t=1$ (Jahr) ein Zinsbetrag $Z_1 = K_0 \cdot \frac{p}{100}$ gutgeschrieben. p ist dabei der prozentuale Zinssatz. Wird der Zinsbetrag ausgezahlt, dann bleibt das Kapital K_t unverändert. Wird der Zinsbetrag dem Kapital zugeschrieben, dann wird in der nächsten Zeiteinheit ein größerer Kapitalbetrag K_1 neu verzinst. Für dieses Zinseszinssparen ergibt sich folgendes Wachstum:

$$K_1 = K_0 + Z_1 = K_0 + K_0 \cdot \frac{p}{100} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_0 \cdot q$$

$$K_2 = K_1 + Z_2 = K_1 + K_1 \cdot \frac{p}{100} = K_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_1 \cdot q = K_0 \cdot q^2$$

$$K_t = K_{t-1} + Z_t = K_{t-1} + K_{t-1} \cdot \frac{p}{100} = K_{t-1} \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_{t-1} \cdot q = K_0 \cdot q^t$$

Der Zinssatz nach t Zeiteinheiten (Jahren) beträgt:

$$Z_t = K_{t-1} \cdot \frac{p}{100} = K_{t-1} \cdot (q - 1) = K_0 \cdot q^{t-1} \cdot (q - 1)$$

Die Gesamtlaufzeit der Spareinlage seien n Jahre:

$$K_n = K_0 \cdot q^n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = \frac{K_u}{K_0} \quad \text{bzw.} \quad 1 + \frac{p}{100} = \sqrt[n]{\frac{K_u}{K_0}} \quad \text{bzw.} \quad p = 100 \left(\sqrt[n]{\frac{K_u}{K_0}} - 1 \right)$$

$$q^n = \frac{K_u}{K_0} \quad \text{bzw.} \quad n \cdot \log(q) = \log\left(\frac{K_u}{K_0}\right) \quad \text{bzw.} \quad n = \frac{\log(K_u) - \log(K_0)}{\log(q)}$$

Beispiel einer Spargeldentwicklung für $K_0 = 100.000 \text{ DM}$
 $p = 5\%$ und $n = 10 \text{ Jahre}$:

Sparen mit Zinsauszahlung

T	Kapital	Zinsen
0	100000.00	
1	100000.00	5000.00
2	100000.00	5000.00
3	100000.00	5000.00
4	100000.00	5000.00
5	100000.00	5000.00
6	100000.00	5000.00
7	100000.00	5000.00
8	100000.00	5000.00
9	100000.00	5000.00
10	100000.00	5000.00
Summe	=	50000.00

Sparen mit Zinseszinsen

T	Kapital	Zinsen
0	100000.00	
1	105000.00	5000.00
2	110250.00	5250.00
3	115762.50	5512.50
4	121550.63	5788.13
5	127628.16	6077.53
6	134009.56	6381.41
7	140710.04	6700.48
8	147745.54	7035.50
9	155132.82	7387.28
10	162889.46	7756.64
Summe	=	62889.46

Mehrere Aufzinsungen pro Zeiteinheit

Normalerweise werden die Zinsen nach einem Jahr gemäß dem Zinssatz berechnet und dem Kapital zugeschrieben. Es ist jedoch auch möglich, pro Jahr mehrere Aufzinsungen durchzuführen. Dabei wird der Jahreszinssatz p durch die Anzahl der Aufzinsungen m geteilt und dann m mal pro Jahr verzinnt:

$${}_mK_t = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100 \cdot m}\right)^{m \cdot t}$$

Mit $m = \mu \cdot \frac{p}{100}$ gilt: $\frac{p}{100 \cdot m} = \frac{1}{\mu}$

$${}_{\mu}K_t = K_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^{\mu \cdot \frac{p}{100} \cdot t}$$

Es gilt: $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^{\mu} = e = 2.718$

Daraus folgt:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} {}_mK_t = \lim_{\mu \rightarrow \infty} {}_{\mu}K_t = \lim_{\mu \rightarrow \infty} K_0 \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^{\mu}\right]^{\frac{p}{100} \cdot t} = K_0 \cdot e^{\frac{p}{100} \cdot t}$$

Wird unendlich oft aufgezinst, dann strebt die Kapitalentwicklung gegen die Exponentialfunktion:

$$K_t = K_0 \cdot e^{a \cdot t} \quad \text{mit} \quad a = \frac{p}{100}$$

Beispiel einer mehrfachen Aufzinsung für $K_0 = 100000$ DM

$p = 10\%$ und $n = 1$ Jahr d.h. 12 Monate.

Der Aufzinsungsfaktor m ist 1, 2, 3, 6, 12.

Die letzte Spalte ist für $m = \infty$, das ergibt die Exponentialfunktion $K_t = K_0 \cdot \exp\left(\frac{10\%}{100} \cdot t\right)$

Sparen mit mehrfacher Aufzinsung

T	Kapital_1	Kapital_2	Kapital_3	Kapital_6	Kapital_12	Kapital_∞
0	100000.00	100000.00	100000.00	100000.00	100000.00	100000.00
1					100833.33	100836.82
2				101666.67	101673.61	101680.63
3					102520.89	102531.51
4			103333.33	103361.11	103375.23	103389.51
5					104236.69	104254.69
6		105000.00		105083.80	105105.33	105127.11
7					105981.21	106006.83
8			106777.78	106835.19	106864.39	106893.91
9					107754.92	107788.42
10				108615.78	108652.88	108690.40
11					109558.32	109599.94
12	110000.00	110250.00	110337.04	110426.04	110471.31	110517.09

Übrigens kann man die normale Kapitalentwicklung

$K_t = K_0 \cdot q^t$ auch als Exponentialfunktion schreiben:

$$K_t = K_0 \cdot q^t = K_0 \cdot (e^a)^t = K_0 \cdot e^{a \cdot t}$$

Also gilt: $e^a = q$ bzw. $a = \ln(q) = \ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)$

Für kleine p kann der Logarithmus entwickelt werden:

$$a = \ln\left(1 + \frac{p}{100}\right) \approx \frac{\left(\frac{p}{100}\right)}{1} - \frac{\left(\frac{p}{100}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{p}{100}\right)^3}{3} - \dots \approx \frac{p}{100}$$

Also folgt: $a \approx \frac{p}{100} = \alpha$

Geldleihen mit Zinsen

Wenn man sich bei einem Kreditinstitut Geld leih, dann muß man diesen Schuldbetrag nach einer gewissen Zeit zurückzahlen. Diese Rückzahlung nennt man Tilgung. Außerdem muß man für die Leihzeit Kreditzinsen zahlen.

Die mathematisch einfachste Leihform ist der Festkredit, bei dem der gesamte Leihbetrag am Ende der n Laufzeitjahre zurückgezahlt wird. Vorher wird nur jährlich der Leihzins bezahlt. Leih, man sich zum Beispiel 100 000 DM als Festkredit mit einem Zinssatz von 5% und einer Laufzeit von 10 Jahren, dann zahlt man am Ende vom ersten bis neunten Jahr jeweils 5000 DM Leihzinsen. Am Ende vom zehnten Jahr sind dann noch einmal 5000 DM Zinsen fällig, sowie die Rückzahlung der Schuldsumme von 100 000 DM.

Kredit mit konstanter Tilgung

Beim Festkredit wird die gesamte Schuldsumme am Ende der Laufzeit zurückgezahlt. Es ist jedoch auch möglich, die Schuld in Raten innerhalb der Kreditlaufzeit zurückzuzahlen. Bei konstanter Tilgung ergibt sich der jährliche Tilgungsbetrag als Quotient von Schuldsumme durch Laufzeit: $T = K_0 / n$. T ist der Tilgungsbetrag und K_0 die anfängliche Kapitalschuld. Zur Tilgung kommen zusätzlich die Kreditzinsen, welche nun von Jahr zu Jahr abnehmen. Der gesamte zu zahlende Jahresbetrag wird als Annuität A bezeichnet.

$$\begin{aligned}
 K_1 &= K_0 - T & A_1 &= T + Z_1 = T + K_0 \cdot \frac{p}{100} = T + K_0 \cdot (q-1) \\
 K_2 &= K_0 - 2 \cdot T & A_2 &= T + Z_2 = T + K_1 \cdot \frac{p}{100} = T + [K_0 - T] \cdot (q-1) \\
 K_3 &= K_0 - 3 \cdot T & A_3 &= T + Z_3 = T + K_2 \cdot \frac{p}{100} = T + [K_0 - 2T] \cdot (q-1) \\
 K_t &= K_0 - t \cdot T & A_t &= T + Z_t = T + K_{t-1} \cdot (q-1) = T + [K_0 - (t-1) \cdot T] \cdot (q-1) \\
 K_n &= K_0 - n \cdot T \stackrel{!}{=} 0 & \Rightarrow & T = \frac{K_0}{n}
 \end{aligned}$$

Wir haben folgende Gesetzmäßigkeiten gefunden:

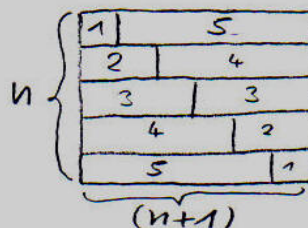
$$\begin{aligned}
 K_t &= K_0 - t \cdot T & T_t &= T = \frac{K_0}{n} \quad (\text{konstante Tilgung}) \\
 Z_t &= [K_0 - (t-1) \cdot T] \cdot (q-1) = \frac{K_0(q-1)}{n} \cdot [n+1-t] \quad (\text{Zinsen}) \\
 A_t &= T + Z_t = \frac{K_0}{n} \cdot \{1 + (q-1) \cdot [n+1-t]\} \quad (\text{Annuität})
 \end{aligned}$$

Die gesamte Zinssumme ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}
 Z_{\text{ges}} &= \sum_{t=1}^n Z_t = \frac{K_0(q-1)}{n} \sum_{t=1}^n [n+1-t] = \frac{K_0(q-1)}{n} \left[n(n+1) - \frac{n(n+1)}{2} \right] \\
 &= \frac{K_0(q-1)}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{K_0(q-1)}{2} \cdot (n+1)
 \end{aligned}$$

Hierbei wurde die Summenformel der arithmetischen Reihe benutzt:

$$\sum_{t=1}^n t = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$



Diese Herleitung
über Rechteckfläche
stammt von Gauß.

Beispiel eines Tilgungsplans mit konstanter Tilgung für einen Kreditbetrag von 100000 DM, 10 Jahre Laufzeit und 10% Zinssatz:

Kredit mit konstanter Tilgung

t	Kapital	Zinsen	Tilgung	Annuität
0	100000.00			
1	90000.00	10000.00	10000.00	20000.00
2	80000.00	9000.00	10000.00	19000.00
3	70000.00	8000.00	10000.00	18000.00
4	60000.00	7000.00	10000.00	17000.00
5	50000.00	6000.00	10000.00	16000.00
6	40000.00	5000.00	10000.00	15000.00
7	30000.00	4000.00	10000.00	14000.00
8	20000.00	3000.00	10000.00	13000.00
9	10000.00	2000.00	10000.00	12000.00
10	0.00	1000.00	10000.00	11000.00
Summen =		55000.00	100000.00	155000.00

Kredit mit konstanter Annuität

Bei konstanter Tilgung ist jedes Jahr ein anderer Betrag zu zahlen. Um eine einfachere Rückzahlung zu ermöglichen, kann man auch die Annuität $A_t = A$ konstant halten:

$$K_1 = K_0 - T_1 = K_0 + Z_1 - (T_1 + Z_1) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - A = K_0 \cdot q - A$$

$$\begin{aligned} K_2 &= K_1 - T_2 = K_1 + Z_2 - (T_2 + Z_2) = K_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - A = K_1 \cdot q - A \\ &= [K_0 \cdot q - A] \cdot q - A = K_0 \cdot q^2 - A \cdot (1 + q) \end{aligned}$$

$$K_3 = K_2 \cdot q - A = [K_0 \cdot q^2 - A \cdot (1 + q)] \cdot q - A = K_0 \cdot q^3 - A \cdot (1 + q + q^2)$$

$$K_4 = K_3 \cdot q - A = [K_0 \cdot q^3 - A \cdot (1 + q + q^2)] \cdot q - A = K_0 \cdot q^4 - A \cdot (1 + q + q^2 + q^3)$$

$$\begin{aligned} K_t &= K_{t-1} \cdot q - A = [K_0 \cdot q^{t-1} - A \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^{t-2})] \cdot q - A \\ &= K_0 \cdot q^t - A \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^{t-1}) = K_0 \cdot q^t - A \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1} \end{aligned}$$

$$K_n = K_0 \cdot q^n - A \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{K_0 \cdot (q - 1)}{q^n - 1} \cdot q^n$$

Wie man sieht, ergibt sich die Annuität A aus der Forderung, daß der Kredit nach n Jahren abbezahlt ist.

Es wurde das Bildungsgesetz der geometrischen Reihe benutzt:

$$q \cdot \sum_{i=0}^{t-1} q^i = q \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^{t-1}) = \cancel{q} + \cancel{q^2} + \cancel{q^3} + \dots + q^t$$

$$-1 \cdot \sum_{i=0}^{t-1} q^i = -1 \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^{t-1}) = -1 - \cancel{q} - \cancel{q^2} - \dots - \cancel{q^{t-1}}$$

$$(q-1) \cdot \sum_{i=0}^{t-1} q^i = q^t - 1 \quad \text{bzw.} \quad \sum_{i=0}^{t-1} q^i = \frac{q^t - 1}{q - 1}$$

Der zeitliche Verlauf von Schuldbetrag K_t , Zinsen Z_t und Tilgung T_t ergibt sich nun in folgender Weise:

$$\begin{aligned} K_t &= K_0 \cdot q^t - A \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1} = K_0 \cdot q^t - \frac{K_0 \cdot (q-1)}{q^n - 1} \cdot q^n \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1} \\ &= K_0 \cdot \frac{q^t(q^n - 1) - q^n(q^t - 1)}{q^n - 1} = K_0 \cdot \frac{q^t q^n - q^t - q^n q^t + q^n}{q^n - 1} = K_0 \cdot \frac{q^n - q^t}{q^n - 1} \end{aligned}$$

$$Z_t = K_{t-1} \cdot (q - 1) = K_0 \cdot \frac{q^n - q^{t-1}}{q^n - 1} \cdot (q - 1) = \frac{K_0(q-1)}{q^n - 1} \cdot (q^n - q^{t-1})$$

$$T_t = A - Z_t = \frac{K_0(q-1)}{q^n - 1} \cdot q^n - \frac{K_0(q-1)}{q^n - 1} \cdot (q^n - q^{t-1}) = \frac{K_0(q-1)}{q^n - 1} \cdot q^{t-1}$$

Beispiel eines Tilgungsplans mit konstanter Annuität für einen Kreditbetrag von 100 000 DM, 10 Jahre Laufzeit und 10 % Zinssatz:

Kredit mit konstanter Annuität

t	Kapital	Zinsen	Tilgung	Annuität
0	100000.00			
1	93725.46	10000.00	6274.54	16274.54
2	86823.47	9372.55	6901.99	16274.54
3	79231.27	8682.35	7592.19	16274.54
4	70879.86	7923.13	8351.41	16274.54
5	61693.31	7087.99	9186.55	16274.54
6	51588.10	6169.33	10105.21	16274.54
7	40472.37	5158.81	11115.73	16274.54
8	28245.07	4047.24	12227.30	16274.54
9	14795.04	2824.51	13450.03	16274.54
10	0.00	1479.50	14795.04	16274.54
Summen =		62745.39	100000.00	162745.39

Die Gesamttilgungssumme ist $\sum_{t=1}^n T_t = K_0$ wie es sein muß, und sich aus der geometrischen Reihe ergibt.

Die Gesamtannuitätssumme ist einfach $A \cdot n$, weil die Annuität konstant ist und die Laufzeit n Jahre beträgt. Die Gesamtzinssumme ergibt sich damit zu:

$$Z_{\text{ges}} = \sum_{t=1}^n Z_t = A \cdot n - K_0 = K_0 \cdot \left[\frac{q-1}{q^n-1} \cdot q^n \cdot n - 1 \right]$$

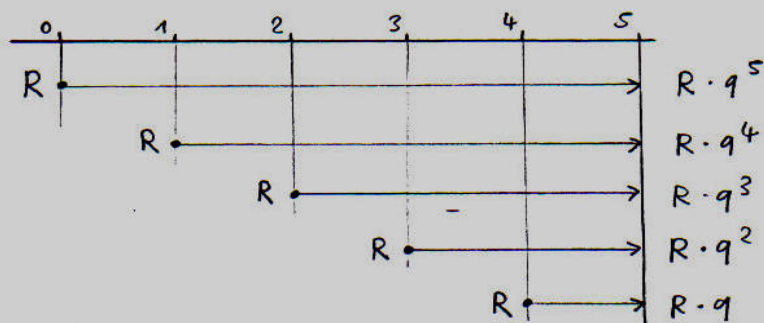
Renteurechnung:

Bei einer einfachen Spareinlage wird einmal ein Betrag K_0 eingezahlt, welcher nach n Jahren auf $K_n = K_0 \cdot q^n$ (Zinseszinsen) anwächst. Ein Kapitalvermögen kann jedoch auch durch periodische Einzahlungen einer bestimmten Rate R pro Zeiteinheit entstehen. Wird diese Rate am Anfang eines Zeitintervalls eingezahlt, dann spricht man von vorschüssiger Einzahlung. Wird sie am Ende eingezahlt von nachschüssiger Einzahlung.

Ein typisches Beispiel einer solchen periodischen Rateinzahlung sind die Rentenbeiträge die man an eine Rentenversicherungsgesellschaft zahlt. Mathematisch ähnlich sind dann die periodischen Rentenauszahlungen, bei denen das weiter verzinste Kapitalvermögen durch periodische Rateauszahlungen schrittweise abgebaut wird. Daher spricht man bei diesem Rate Sparkalkül von Rentenrechnung. Sie kommt jedoch auch bei vermögensbildenden Versicherungen (z.B. Lebensversicherungen) zur Anwendung.

Vorschüssige Renteneinzahlung

Betrachtet man jede eingezahlte Rate als eine eigenständige Spareinlage, dann erkennt man leicht den Aufbau der Rateusparformel. Bei vorschüssiger Einzahlung beginnt die Einzahlung am Anfang des ersten Laufjahres:



Es wurden 5 Raten R eingezahlt.

Das Kapital K_t am Ende des t -ten

Jahres ergibt sich zu:

$$K_5 = R \cdot q + R \cdot q^2 + R \cdot q^3 + R \cdot q^4 + R \cdot q^5 = R \cdot q \cdot (1 + q + q^2 + q^3 + q^4)$$

$$K_t = R \cdot q \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^{t-1}) = R \cdot q \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1}$$

Man kann die Formel alternativ auch so herleiten:

$$\bar{K}_0 = K_0 + R = R \quad \text{weil } K_0 = 0$$

$$\bar{K}_1 = K_1 + R = \bar{K}_0 \cdot q + R = [R] \cdot q + R = R \cdot (1 + q)$$

$$\bar{K}_2 = K_2 + R = \bar{K}_1 \cdot q + R = [R \cdot (1 + q)] \cdot q + R = R \cdot (1 + q + q^2)$$

$$\bar{K}_3 = K_3 + R = \bar{K}_2 \cdot q + R = [R \cdot (1 + q + q^2)] \cdot q + R = R \cdot (1 + q + q^2 + q^3)$$

$$K_t = \bar{K}_{t-1} \cdot q = R \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^{t-1}) \cdot q = R \cdot q \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1}$$

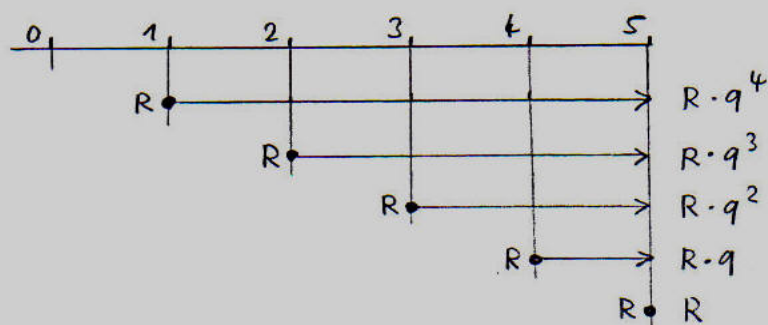
$$\bar{K}_t = K_t + R = R \cdot (q + q^2 + q^3 + \dots + q^t) + R = R \cdot \frac{q^{t+1} - 1}{q - 1}$$

K_t ist das Kapital am Anfang des t -ten Jahres, bevor die Rate R zugezahlt wird. Mit der Rate ergibt sich $\bar{K}_t$ als verzinbares Kapital für das sich anschließende t -te Zeitintervall. Am Anfang des n -ten Jahres wird der Rate Sparvertrag beendet. Es gibt keine abschließende Einzahlung, wodurch das Endkapital

durch $K_n = R \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ gegeben ist.

Nachschüssige Renteneinzahlung

Hierbei wird am Ende einer jeden Zeiteinheit (Jahr) die Rate R eingezahlt. Das führt dazu, daß im ersten Jahr gar kein Kapital zur Verzinsung vorliegt und die letzte Rate am Ende der Laufzeit eingezahlt wird und daher nicht mehr verzinst wird:



Es wurden 5 Raten R eingezahlt. Das Kapital $\bar{K}_t$ am Ende des k -ten Jahres ergibt sich zu:

$$\bar{K}_5 = R + R \cdot q + R \cdot q^2 + R \cdot q^3 + R \cdot q^4 = R \cdot (1 + q + q^2 + q^3 + q^4)$$

$$\bar{K}_t = R \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^{t-1}) = R \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1}$$

Man kann die Formel abermals alternativ herleiten:

$$\bar{K}_0 = K_0 = 0$$

— 10 —

$$\bar{K}_1 = K_1 + R = \bar{K}_0 \cdot q + R = [0] \cdot q + R = R$$

$$\bar{K}_2 = K_2 + R = \bar{K}_1 \cdot q + R = [R] \cdot q + R = R \cdot (1+q)$$

$$\bar{K}_3 = K_3 + R = \bar{K}_2 \cdot q + R = [R \cdot (1+q)] \cdot q + R = R \cdot (1+q+q^2)$$

$$K_t = \bar{K}_{t-1} \cdot q = R \cdot (1+q+q^2+\dots+q^{t-2}) \cdot q = R \cdot q \cdot \frac{q^{t-1}-1}{q-1}$$

$$\bar{K}_t = K_t + R = R \cdot (q+q^2+q^3+\dots+q^{t-1}) + R = R \cdot \frac{q^t-1}{q-1}$$

Weil diesmal auch am Ende des letzten (n -ten) Zeitintervalls eine Rate R eingezahlt wird, gibt es nun ein K_n und ein $\bar{K}_n$:

$$K_n = R \cdot q \cdot \frac{q^{n-1}-1}{q-1} \quad \text{und} \quad \bar{K}_n = R \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$$

Der Barwert

Beim Rateusparen wird das Kapital K_n nach n Jahren und mit der Zahlung von n Raten R aufgebaut. Würde man einen bestimmten Betrag B am Anfang der n -Jahre anlegen und mit dem gleichen Zinssatz $q = (1 + \frac{p}{100})$ den Endbetrag K_n erreichen, dann nennt man B den Barwert des Rentenkapitals:

$$K_n = B \cdot q^n \quad ; \quad B = \frac{K_n}{q^n}$$

Vorschiüssiger Barwert: $B = \frac{K_n}{q^n} = \frac{R \cdot q \cdot \frac{q^n-1}{q-1}}{q^n} = \frac{R}{q^{n-1}} \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$

Nachschüssiger Barwert: $\bar{B} = \frac{\bar{K}_n}{q^n} = \frac{R \cdot \frac{q^n-1}{q-1}}{q^n} = \frac{R}{q^n} \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$

Beispiel eines Raten Sparplans für vorschüssige und nachschüssige Einzahlung. Rate $R = 10000 \text{ DM}$, 10 Jahre Laufzeit und 5% Zinssatz:

Vorschüssige Renteneinzahlung		
t	Kapital	Zinsen
0	10000.00	
1	20500.00	500.00
2	31525.00	1025.00
3	43101.25	1576.25
4	55256.31	2155.06
5	68019.13	2762.82
6	81420.08	3400.96
7	95491.09	4071.00
8	110265.64	4774.55
9	125778.93	5513.28
10	132067.87	6288.95
Summe =		32067.87

Nachschüssige Renteneinzahlung		
t	Kapital	Zinsen
0	0.00	
1	10000.00	0.00
2	20500.00	500.00
3	31525.00	1025.00
4	43101.25	1576.25
5	55256.31	2155.06
6	68019.13	2762.82
7	81420.08	3400.96
8	95491.09	4071.00
9	110265.64	4774.55
10	125778.93	5513.28
Summe =		25778.93

Vorschüssige Rentenauszahlung

Ein gegebenes Kapital K_0 soll bei weiterer Verzinsung in periodischen Raten R ausgezahlt werden. Das ist typisch für eine Rentenauszahlung. Wird jeweils am Anfang eines Zeitintervalls ausgezahlt, dann spricht man von vorschüssiger

Rentenauszahlung.

$$\bar{K}_0 = K_0 - R$$

$$\bar{K}_1 = K_1 - R = \bar{K}_0 \cdot q - R = [K_0 - R] \cdot q - R = K_0 \cdot q - R \cdot (1 + q)$$

$$\bar{K}_2 = K_2 - R = \bar{K}_1 \cdot q - R = [K_0 \cdot q - R \cdot (1 + q)] \cdot q - R = K_0 \cdot q^2 - R \cdot (1 + q + q^2)$$

$$\bar{K}_3 = K_3 - R = \bar{K}_2 \cdot q - R = [K_0 \cdot q^2 - R \cdot (1 + q + q^2)] \cdot q - R = K_0 \cdot q^3 - R \cdot (1 + q + q^2 + q^3)$$

$$K_t = \bar{K}_{t-1} \cdot q = K_0 \cdot q^t - R \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^{t-1}) \cdot q = K_0 \cdot q^t - R \cdot q \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1}$$

$$\bar{K}_t = K_t - R = K_0 \cdot q^t - R \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^t) = K_0 \cdot q^t - R \cdot \frac{q^{t+1} - 1}{q - 1}$$

Die Auszahlungsdauer sei auf n Zeiteinheiten (Jahre) festgelegt. Dann bleibt folgendes Restkapital K_n auf dem Konto:

$$K_n = K_0 \cdot q^n - R \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \bar{K}_{n-1} \cdot q$$

Nachschüssige Rentenauszahlung

Wird jeweils am Ende eines Zeitintervalls ausgezahlt, dann spricht man von nachschüssiger Rentenauszahlung:

$$\bar{K}_0 = K_0$$

$$\bar{K}_1 = K_1 - R = \bar{K}_0 \cdot q - R = [K_0] \cdot q - R = K_0 \cdot q - R$$

$$\bar{K}_2 = K_2 - R = \bar{K}_1 \cdot q - R = [K_0 \cdot q - R] \cdot q - R = K_0 \cdot q^2 - R \cdot (1 + q)$$

$$\bar{K}_3 = K_3 - R = \bar{K}_2 \cdot q - R = [K_0 \cdot q^2 - R \cdot (1 + q)] \cdot q - R = K_0 \cdot q^3 - R \cdot (1 + q + q^2)$$

$$K_t = \bar{K}_{t-1} \cdot q = K_0 \cdot q^t - R \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^{t-2}) \cdot q = K_0 \cdot q^t - R \cdot q \cdot \frac{q^{t-1} - 1}{q - 1}$$

$$\bar{K}_t = K_t - R = K_0 \cdot q^t - R \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^{t-1}) = K_0 \cdot q^t - R \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1}$$

Am Ende des n -ten Zeitintervalls wird von dem Restkapital K_n noch einmal eine Rate R abgezogen, so das $\bar{K}_n$ der Betrag ist, der auf dem Konto verbleibt:

$$K_n = K_0 \cdot q^n - R \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{und} \quad \bar{K}_n = K_0 \cdot q^n - R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Beispiel eines Rateusparplans für vorschüssige und nachschüssige Auszahlung. Rate $R = 10000$ DM
Zinssatz $p = 5\%$:

Vorschüssige Rentenauszahlung		
t	Kapital	Zinsen
0	90000.00	
1	84500.00	4500.00
2	78725.00	4225.00
3	72661.25	3936.25
4	66294.31	3633.06
5	59609.03	3314.72
6	52589.48	2980.45
7	45218.95	2629.47
8	37479.90	2260.95
9	29353.90	1874.00
10	20821.59	1467.69
11	11862.67	1041.08
12	2455.80	593.13
13	0.00	0.00
14	0.00	0.00
15	0.00	0.00
Summe	=	32455.80

Nachschüssige Rentenauszahlung		
t	Kapital	Zinsen
0	100000.00	
1	95000.00	5000.00
2	89750.00	4750.00
3	84237.50	4487.50
4	78449.38	4211.88
5	72371.84	3922.47
6	65990.44	3618.59
7	59289.96	3299.52
8	52254.46	2964.50
9	44867.18	2612.72
10	37110.54	2243.36
11	28966.06	1855.53
12	20414.37	1448.30
13	11435.09	1020.72
14	2006.84	571.75
15	0.00	0.00
Summe	=	42006.84

Laufzeit einer nachschüssigen Rentenauszahlung

Es ist die Zahl der Zeiteinheiten (Jahre) n gesucht, bis der Kontostand von K_0 auf $\bar{K}_n$ gefallen ist:

$$\bar{K}_n = K_0 \cdot q^n - R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = K_0 \cdot q^n - \frac{R}{q - 1} \cdot q^n + \frac{R}{q - 1}$$

$$q^n \cdot \left(K_0 - \frac{R}{q - 1} \right) = \bar{K}_n - \frac{R}{q - 1} \quad \text{bzw.} \quad q^n = \frac{\bar{K}_n - \frac{R}{q - 1}}{K_0 - \frac{R}{q - 1}}$$

$$n \cdot \log(q) = \log\left(\frac{\bar{K}_n - \frac{R}{q - 1}}{K_0 - \frac{R}{q - 1}} \right) \Rightarrow n = \frac{\log\left(\frac{\bar{K}_n - \frac{R}{q - 1}}{K_0 - \frac{R}{q - 1}} \right)}{\log(q)}$$

Für vorschüssige Rentenauszahlung ergibt sich analog:

$$n = \frac{\log\left(\frac{K_n - \frac{R \cdot q}{q - 1}}{K_0 - \frac{R \cdot q}{q - 1}} \right)}{\log(q)}$$

Der Bruch im Logarithmus sollte nicht getrennt werden, weil ansonsten negative Zahlen in den Logarithmen auftreten können.

Abschreibung

Mit der Abschreibung wird ein Buchwert für wirtschaftliche Investitionsgüter definiert. Beispielsweise kauft eine Firma eine Produktionsmaschine für 100000 DM. Sie soll in fünf Jahren linear auf 0 DM abgeschrieben werden. Nach einem Jahr hat sie dann einen Buchwert von 80000 DM, nach zwei Jahren 60000 DM, dann 40000 DM, 20000 DM und nach 5 Jahren schließlich null DM.

Die Abschreibung ist eine Rechnungsgröße zur Kostenkalkulation und für die Steuerverklärung. Bei dem obigen Beispiel soll die Maschine fünf Jahre betrieben werden. In der Produktpreiskalkulation muß berücksichtigt werden, daß die Anschaffungskosten gedeckt werden. Also muß für eine Jahresproduktion 20000 DM Anschaffungskosten berücksichtigt werden. Bei der Steuerverklärung werden diese 20000 DM alsUNKOSTEN vom Umsatz abgezogen, so daß der zu versteuernde Gewinn um diesen Betrag gemindert wird. Außerdem kann mit dem Buchwert das Betriebsvermögen beziffert werden.

Die lineare Abschreibung wird von folgenden Formeln beschrieben:

$$K_t = K_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100} \cdot t\right) \quad t = \frac{100}{p} \cdot \left(1 - \frac{K_t}{K_0}\right)$$

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100} \cdot n\right) \quad p = \frac{100}{n} \cdot \left(1 - \frac{K_n}{K_0}\right)$$

K_0 = Kaufpreis

p = Prozentsatz

K_t = Buchwert nach t Jahren

K_n = Buchwert am Ende der Abschreibungslaufzeit.

Geometrisch-degressive Abschreibung (Abschreibung vom Buchwert)

Hierbei wird jeweils vom Buchwert K_t der gleiche Prozentsatz $\frac{P}{100}$ abgezogen. Dabei ergibt sich eine geometrische Folge, die nie null erreichen kann. Auf der anderen Seite repräsentiert diese Folge den natürlichen Wertverlust besser als die Lineare Abschreibung. Will man bis auf Null abschreiben, dann muß nach einer gewissen Zeit auf Lineare Abschreibung gewechselt werden.

$$K_t = K_0 \cdot \left(1 - \frac{P}{100}\right)^t \quad t = \frac{\log\left(\frac{K_t}{K_0}\right)}{\log\left(1 - \frac{P}{100}\right)} = \frac{\log(K_t) - \log(K_0)}{\log\left(1 - \frac{P}{100}\right)}$$

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 - \frac{P}{100}\right)^n \quad P = 100 \cdot \left(1 - \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}\right)$$

Arithmetisch-degressive Abschreibung (digitale Abschreibung)

Hierbei wird eine Abschreibungseinheit E eingeführt. Im ersten Jahr werden n Einheiten E abgeschrieben, im zweiten Jahr $(n-1)$ Einheiten, im dritten $(n-2)$ Einheiten und so weiter. Im n -ten und letzten Jahr wird nur noch eine Einheit E abgeschrieben. Die arithmetisch degressive Abschreibung zeigt ein ähnliches Verhalten wie die geometrisch degressive Abschreibung. Sie ermöglicht jedoch einen beliebigen Endwert K_n , also auch Null.

$$K_1 = K_0 - E \cdot n$$

$$K_2 = K_1 - E \cdot (n-1) = K_0 - E \cdot n - E \cdot (n-1) = K_0 - E \cdot (2n-1)$$

$$K_3 = K_2 - E \cdot (n-2) = K_0 - E \cdot (2n-1) - E \cdot (n-2) = K_0 - E \cdot (3n-3)$$

$$K_4 = K_3 - E \cdot (n-3) = K_0 - E \cdot (3n-3) - E \cdot (n-3) = K_0 - E \cdot (4n-6)$$

$$K_t = K_{t-1} - E \cdot (n+1-t) = K_0 - E \cdot \sum_{i=1}^t (n+1-i) = K_0 - E \cdot \left[(n+1) \cdot t - \frac{t(t+1)}{2} \right]$$

$$= K_0 - E \cdot \frac{t}{2} \cdot [2n+2 - (t+1)] = K_0 - E \cdot \frac{t}{2} (2n+1-t)$$

$$K_n = K_0 - E \cdot \frac{n}{2} (2n+1-n) = K_0 - E \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

Stellt man den Ausdruck für K_n nach E um, dann erhält man die Bestimmungsgleichung für die Abschreibungseinheit E :

$$E = \frac{2 \cdot (K_0 - K_n)}{n \cdot (n+1)} \Rightarrow K_t = K_0 - \frac{K_0 - K_n}{n(n+1)} \cdot t \cdot (2n+1-t)$$

Man kann die Lineare Abschreibung mit einer Geraden interpolieren. Die geometrisch-degressive Abschreibung wird durch die Exponentialfunktion interpoliert.

Man kann für die arithmetisch-degressive Abschreibung auch eine Interpolationsfunktion angeben. Dafür muß man folgende Variablentransformation durchführen:

$$t' = \left(n + \frac{1}{2}\right) - t$$

Damit ergibt sich die Interpolationsfunktion. Eine Parabel:

$$K_{t'} = \left[K_n - \frac{1}{4} \frac{K_0 - K_n}{n(n+1)} \right] + \frac{K_0 - K_n}{n(n+1)} \cdot t'^2 = \left[K_n - \frac{E}{8} \right] + \frac{E}{2} \cdot t'^2$$

In der Graphik ist diese Interpolationsparabel punktiert eingezeichnet. Das Kreuz kennzeichnet den Scheitelpunkt bei $t_{\text{Scheitel}} = n + \frac{1}{2}$ und $K(t_{\text{Scheitel}}) = K_n - \frac{E}{8}$

Abschreibungsplan für Lineare, Arithmetisch-degressive und Geometrisch-degressive Abschreibung:

Abschreibung			
t	Linear	Arithmet.	Geometri.
0	120000.00	120000.00	120000.00
1	100000.00	100000.00	100000.00
2	80000.00	82000.00	83333.33
3	60000.00	66000.00	69444.44
4	40000.00	52000.00	57870.37
5	20000.00	40000.00	48225.31
6	0.00	30000.00	40187.76
7	0.00	22000.00	33489.80
8	0.00	16000.00	27908.16
9	0.00	12000.00	23256.80
10	0.00	10000.00	19380.67

$$K_0 = 120\,000 \text{ DM}$$

$$p = 16.67 \%$$

$$n = 10 \text{ Jahre}$$

$$K_n = 10\,000 \text{ DM}$$

$$E = 2000 \text{ DM}$$

Graphische Darstellung des obigen Abschreibungsplans.
Die Lineare Abschreibung erreicht schon nach sechs Jahren den Buchwert null:

